

MotorControl Lab 操作与控制系统实验手册

2026-10-23 修订 | 电机控制虚拟实验室

作者与开发者：叶志钧博士 (Dr. Jack Yeh)

MotorControl Lab 致力于建立一座可直接在网页上操作的电机控制虚拟实验室，将接近真实系统的马达动态、数位控制与功率转换行为，转化为可观察、可调整、可反复验证的学习与实验环境。希望让学习者从控制原理出发，透过即时仿真与波形分析，理解参数设定如何影响系统响应，缩短理论与实务之间的距离。

本平台兼顾教学与工程应用：教师与学生可用于课堂示范、自主学习及控制实验；工程师则可快速调整控制器、比较不同设计与验证仿真结果。在本平台涵盖的模型与功能范围内，使用者不必先另行搭建 MATLAB / Simulink 模型，即可直接在浏览器中进行初步分析与反复测试，减少模型建置与操作准备的时间。

本手册循序介绍 PMSM 的电流、速度与位置控制，并说明数位取样、PWM、电压限制、前馈及 anti-windup 的影响。公式采零初始条件；传递函数代表未饱和、小讯号的名义模型，实际时间波形则由含 PWM 切换的非线性模型计算。图中的英文名称与操作介面对照；HTML 版本可点选「放大查看」检视向量图细节。

版权声明：© 2026 叶志钧博士 (Dr. Jack Yeh)。保留所有权利。MotorControl Lab 自行开发之软体、教学内容，以及本手册的文字与图表，版权均属叶志钧博士所有。未经授权，不得重制、修改、散布或用于商业用途；所使用之第三方软体与资源，其权利归各自权利人所有，并依各自授权条款使用。

版本基准：2026-10-22 数值模型；2026-10-23 手册修订。包含 Mechanical Condition 与 Controller Output / Anti-Windup 诊断。

目录

1. 软体用途与快速开始
2. 模式与讯号路径
3. 参数、单位与预设值
4. 实际 PMSM 模型与各方块方程式
5. 控制回路传递函数
6. 数位控制与 PWM 时序
7. 波形与诊断读法
8. Bode 分析操作与解读
9. 六个实验
10. 资料汇出、常见问题与实验纪录
11. 附录：数位速度 / 位置模型

1. 软体用途与快速开始

1.1 页面各区功能

区域	操作与用途
语言 / Control Mode	选择 English 或繁体中文，以及 Current、Speed、Position 模式
控制方块图	点选任一 Block，在右侧检查与修改对应参数；被旁路的方块不参与该模式控制
参数面板	输入 PI 增益、马达参数、命令、限幅、PWM 与负载条件
Run / 执行模拟	以当下参数快照重新执行；Stop 可停止当次计算
结果指标	显示最终转速、最终 iq、峰值相电流、电压饱和比例与计算耗时
Simulation Time Cursor / 时序游标	回看指定时间的 CNT、active / pending CCR、ADC 及感测状态
Waveform instruments	切换控制响应、回授链、控制器 / AW 诊断、PWM / dead-time 波形
Loop Bode Analysis	选目前设定或上次模拟快照，检查回授与命令追踪频率响应
CSV 汇出	保存该次结果、参数与 metadata；包含总览及末段高速资料

1.2 第一次操作

1. 开启既有 MotorControl Lab 页面。首次载入需连网，以载入 Plotly 与 Pyodide / NumPy；等待引擎就绪。
2. 选 Current Control Mode，点 Current Ref。
3. Mechanical Condition 选 Locked Rotor；设定 $i_d=0$ A、 $i_q=5$ A、Start=0.02 s、Duration=0.25 s。
4. 点 PMSM，把负载设为 0 N·m；保留其余预设值。
5. 执行模拟。在 dq current control 检查 i_q 是否追上 5 A。
6. 切换 Controller Output / Anti-Windup，对照 q 轴 P、I、PI raw 及向量限幅前后电压。
7. 修改参数后必须重新执行。黄色「需重跑」提示表示图仍是上次结果，不能当成新设定的结果。

每次执行都从零电流、零速度、零机械角开始；不是接续上次模拟。Bode 若选「目前设定」，可以先于时间波形更新，比较时要确认使用相同快照。

2. 模式与讯号路径

2.1 Current Mode : 电流控制

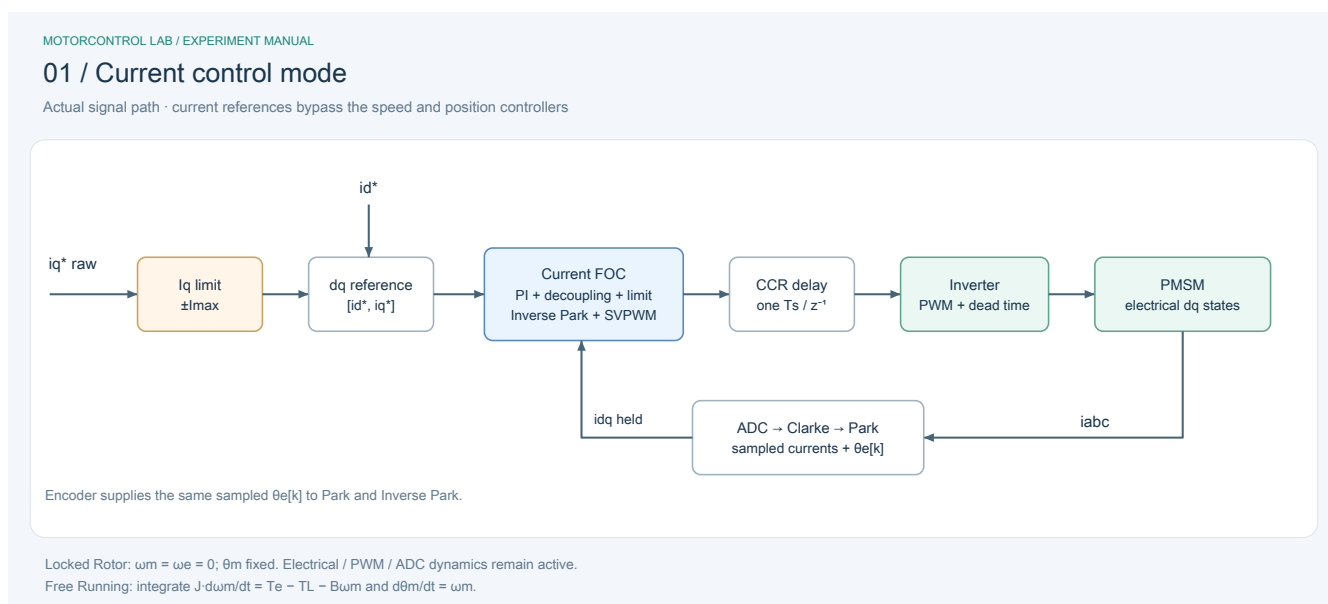


图 01 | Current Mode 实际电流控制讯号路径。蓝色为控制器、橙色为限幅或 AW、绿色箭头为前馈；实线箭头表示讯号方向。

速度与位置控制器旁路。 i_d 直接作为 d 轴命令； i_q 经 q 轴电流命令限制。Current Mode 的 d 轴命令从模拟起点即生效，Start time 只控制 i_q 阶跃。

Mechanical Condition 是实验操作条件：

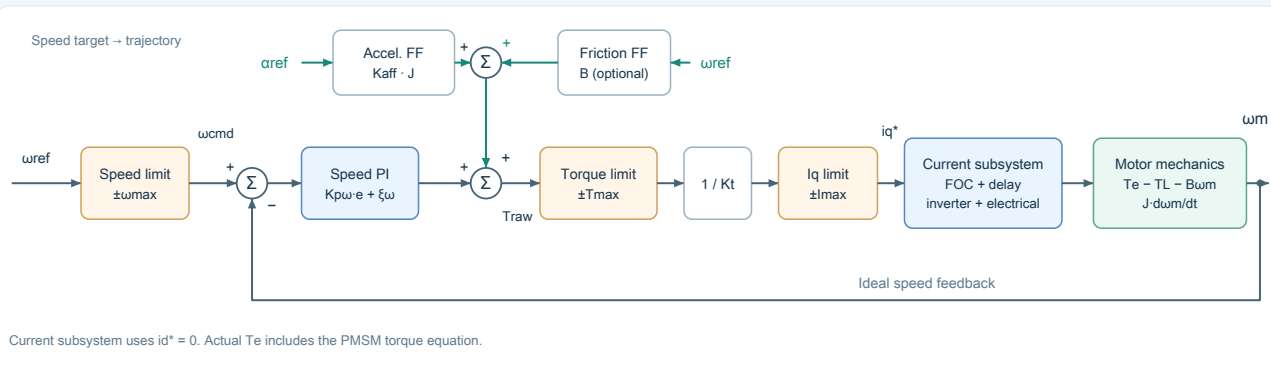
- Locked Rotor (预设)：固定 $\omega_m=0$ 、 $\omega_e=0$ 、 $\theta_m=0$ 。仅机械速度与角度不积分；dq 电流、转矩、inverter、dead-time、ADC 与 FOC 仍正常运算。锁定装置的反力未另列为波形。
- Free Running：完整积分机械动态。固定正 i_q 会产生正转矩；无负载仍可能持续加速，最后因 back-EMF 与有限 DC bus 而无法维持电流。

机械条件仅对 Current Mode 生效。Speed / Position 一律使用自由机械动态。切换条件需重跑，并非执行中的即时锁转。

2.2 Speed Mode : 速度控制

02 / Speed control mode

Actual command path : speed PI output is torque [N·m], not current [A]



Velocity FF and Position P are bypassed in Speed Mode. Mechanical Condition does not lock this mode.
Speed AW tracks the combined torque / i_q command limits; see Figure 05 for the back-calculation path.

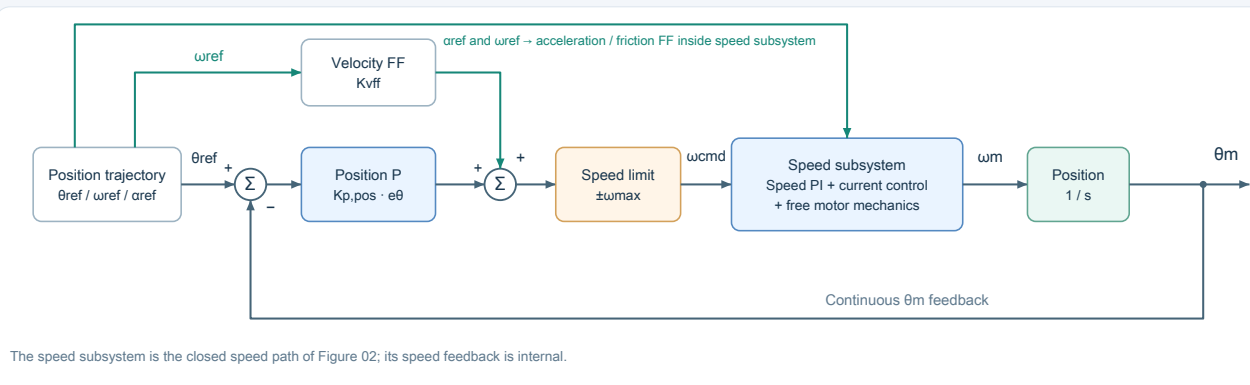
图 02 | Speed Mode 速度 PI、转矩 / 电流限制与内电流环。蓝色为控制器、橙色为限幅或 AW、绿色箭头为前馈；实线箭头表示信号方向。

速度 PI 输出单位为 N·m；经 $1/K_t$ 转换后才是 A。此模式固定 $i_d^*=0$ ，位置 P 与 Velocity FF 旁路。
Acceleration FF 仍可使用。

2.3 Position Mode：位置控制

03 / Position control mode

Actual position command path : continuous mechanical angle feedback · Position P has no integrator



Position target is converted into a smooth reference trajectory; θ_{ref} is not a raw target step.
Position P raw, raw speed with Velocity FF, and speed-limited command are separate diagnostic traces.

图 03 | Position Mode 位置 P、轨迹前馈与速度子系统。蓝色为控制器、橙色为限幅或 AW、绿色箭头为前馈；实线箭头表示信号方向。

位置回授使用连续、不 wrap 的 θ_m ，单位 rad，可观察多圈运动。位置控制器只有 P，没有位置积分或位置 AW。

3. 参数、单位与预设值

3.1 马达与电力级

参数	意义	本版预设
Rs	每相等效电阻	1.2 Ω
Ld / Lq	d / q 轴电感	0.0057 / 0.0125 H
ψ_f	永磁磁链	0.03 Wb
p	极对数，总极数=2p	2
J	转动惯量	0.00016 kg·m ²
B	黏滞摩擦系数	0.0000028 N·m·s/rad
Vdc	直流母线	48 V
m	线性调变限制系数	0.95
Td	dead time 平均模型参数	1 μ s，启用
TL / Load time	负载转矩 / 加入时间	0.15 N·m / 0.15 s

本版 $K_t=1.5p\psi_f=0.09$ N·m/A；电压向量限制约为 26.33 V。正负载 TL 会抵抗正向转动；此处为指定方向的常数转矩，不是随速度改变方向的摩擦模型。

3.2 控制器与命令

参数	本版预设	说明
Kpd / Kid	5.7 / 1200	V/A、V/(A·s)
Kpq / Kiq	12.5 / 1200	V/A、V/(A·s)
Current Kaw	300 s ⁻¹	电压向量限幅回算
Kpw / Kiw	0.016 / 0.32	N·m/(rad/s)、N·m/rad
Speed Kaw	40 s ⁻¹	转矩及 q 电流限制回算
Kp,pos	15 s ⁻¹	位置误差 rad → 速度命令 rad/s
转矩限制 / iq 限制	1.8 N·m / 12 A	两个独立限幅
Speed mode limit	1000 rad/s	速度模式命令限制
Position speed limit	30 rad/s	位置控制器合成命令限制
速度目标	1500 rpm	预设 Speed Step
位置目标	1 rad	从零开始的轨迹
Current iq 命令 / id*	1 A / 0 A	5 A 是手册实验值，非出厂预设
轨迹最大速度 / 加速度	10 rad/s / 100 rad/s ²	最大速度用于位置轨迹
Kvff / Kaff	1 / 1	速度、加速度前馈皆预设启用；摩擦前馈预设关闭
Start / Duration	0.02 s / 0.25 s	Duration 是总模拟时间，包含等待时间

Ki 输入连续增益，不要先乘 Ts。程式在积分更新时自行乘上控制周期。改变 Rs、Ld、Lq、J 等参数不会自动重新整定 PI。

3.3 时间基准

参数	本版预设
要求 PWM 频率	10,000 Hz
Timer clock	100 MHz
ARR	5000
电流控制周期 T_s	100 μs
Speed divider M	1
速度 / 位置更新周期 $T_\omega = M \cdot T_s$	100 μs
最少积分步 / PWM 周期	80
典型 plant 积分步长	1.25 μs ; 程式可自动缩小

Timer tick、plant 积分步长与控制周期是三个不同时间尺度。提高 ARR 不代表 plant 自动以每个 timer tick 积分。

4. 实际 PMSM 模型与各方块方程式

4.1 电气、转矩与机械模型

$$\begin{aligned}L_d \dot{i}_d &= v_d - R_s i_d + \omega_e L_q i_q, \\L_q \dot{i}_q &= v_q - R_s i_q - \omega_e (L_d i_d + \psi_f), \\T_e &= \frac{3}{2} p [\psi_f i_q + (L_d - L_q) i_d i_q], \\J \dot{\omega}_m &= T_e - T_L - B \omega_m, \\\dot{\theta}_m &= \omega_m, \quad \omega_e = p \omega_m.\end{aligned}$$

自由运转时，程式用 midpoint RK2 积分四个状态 i_d 、 i_q 、 ω_m 、 θ_m 。堵转时改为 $\omega_m=0$ 、 θ_m 固定，电气方程依然积分。

两个转矩常数的定义： K_t 与 K_τ （单位均为 $\text{N}\cdot\text{m}/\text{A}$ ）

这两个符号对应不同的方块，不能只因为单位相同，就当成同一个参数。本文以拉丁字母 t 表示 K_t ，以希腊字母 τ （ τ ）表示 K_τ 。

符号	明确定义	在程式与讯号路径中的用途
K_t ：名义永磁转矩常数	$K_t = (3/2)p\psi_f$	命令换算用：速度 PI 输出的转矩命令先经限制，再用 $1/K_t$ 换成 q 轴电流命令。这不是内电流环的传递函数。
K_τ ：固定 d 轴工作点的增量转矩常数	$K_\tau = \partial T_e / \partial i_q$ ，固定 $i_d=i_{d0}$	马达产生转矩用：小讯号 Δi_q 经 K_τ 形成 ΔT_e ，包含该工作点的磁阻转矩效应。

$$K_t = \frac{3}{2} p \psi_f, \quad i_{q,raw}^* = \frac{T_{lim}}{K_t}.$$

K_τ 的来源：由 PMSM 转矩公式逐步推导

步骤 1 | 从完整 PMSM 电磁转矩方程出发。永磁转矩与磁阻转矩都保留：

$$T_e(i_d, i_q) = \frac{3}{2} p [\psi_f i_q + (L_d - L_q) i_d i_q].$$

步骤 2 | 把 d 轴电流固定在工作点 $i_d=i_{d0}$ 。此时 i_{d0} 是常数，将 i_q 提出来：

$$T_e(i_{d0}, i_q) = \frac{3}{2} p [\psi_f i_q + (L_d - L_q) i_{d0} i_q] = \frac{3}{2} p [\psi_f + (L_d - L_q) i_{d0}] i_q.$$

固定的是 d 轴电流 i_d ；接下来让 q 轴电流 i_q 改变。这里不是令 $i_d=i_q$ ，也不是对时间微分；「固定 i_d 」也不等于 Locked Rotor（固定机械转速）。

步骤 3 | 在 i_d 固定时，对 i_q 取偏导数。中括号内的量对 i_q 都是常数，因此微分结果就是 i_q 前面的系数：

$$\begin{aligned} K_\tau &\equiv \left. \frac{\partial T_e}{\partial i_q} \right|_{i_d=i_{d0}} \\ &= \frac{3}{2}p \left[\psi_f \frac{\partial i_q}{\partial i_q} + (L_d - L_q)i_{d0} \frac{\partial i_q}{\partial i_q} \right] \\ &= \frac{3}{2}p [\psi_f + (L_d - L_q)i_{d0}]. \end{aligned}$$

所以 K_τ 就是「d 轴电流保持 i_{d0} 时，q 轴电流每增加 1 A，电磁转矩增加多少 N·m」的斜率，单位是 N·m/A；它是工作点的增量转矩常数，不是 PI 增益或电流环传递函数。

步骤 4 | 换成方块图使用的增量关系。令工作点 q 轴电流为 i_{q0} 、工作点转矩为 T_{e0} ，并令 $i_q = i_{q0} + \Delta i_q$ ：

$$\begin{aligned} T_{e0} &= \frac{3}{2}p [\psi_f + (L_d - L_q)i_{d0}]i_{q0}, \\ \Delta T_e &\equiv T_e(i_{d0}, i_{q0} + \Delta i_q) - T_{e0} \\ &= \frac{3}{2}p [\psi_f + (L_d - L_q)i_{d0}]\Delta i_q \\ &= K_\tau \Delta i_q \quad (\Delta i_d = 0). \end{aligned}$$

因此，方块图中的 $\Delta i_q \rightarrow K_\tau \rightarrow \Delta T_e$ 就来自以上偏导数。对本手册采用的固定参数 PMSM 方程，在 i_d 严格固定时，上述增量关系本身是精确的；将它放入整个速度 Bode 模型时，仍采名义解耦、未饱和的小讯号分析条件。

此处 p 是极对数， ψ_f 是永磁磁链， i_{d0} 是分析工作点的 d 轴电流； Δ 表示工作点附近的小变动。固定 i_d 是使用单一 K_τ 方块的条件。若 d 轴也有扰动，一般线性化还包含下式第二项，不能直接用单一路径概括：

$$\Delta T_e = K_\tau \Delta i_q + \frac{3}{2}p(L_d - L_q)i_{q0}\Delta i_d.$$

$i_{d0}=0$ 或 $L_d=L_q$ 时， $K_\tau=K_t$ 。非零 d 轴电流且 $L_d \neq L_q$ 时，实际转矩含磁阻转矩，不能一律把 T_e 当成 $K_t i_q$ 。一般非线性时间模拟仍使用完整 PMSM 转矩方程，不把 K_τ 当成额外可调马达参数。

目前 Speed / Position 模式采 $i_d^*=0$ ，名义分析使用 $i_{d0}=0$ ，因此两者相同。以预设 $p=2$ 、 $\psi_f=0.03$ Wb 为例， $K_t=K_\tau=0.09$ N·m/A；此相等关系不代表电流闭环 $T_q(s)$ 可以省略。速度回路完整转矩路径见第 5.4 节。

4.2 Clarke、Park 与感测器

Clarke 为 amplitude-invariant：

$$i_\alpha = \frac{2i_a - i_b - i_c}{3}, \quad i_\beta = \frac{i_b - i_c}{\sqrt{3}}.$$

Park 与 Inverse Park：

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_e & \sin \theta_e \\ -\sin \theta_e & \cos \theta_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} v_\alpha^* \\ v_\beta^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_e & -\sin \theta_e \\ \sin \theta_e & \cos \theta_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{d,sat} \\ v_{q,sat} \end{bmatrix}.$$

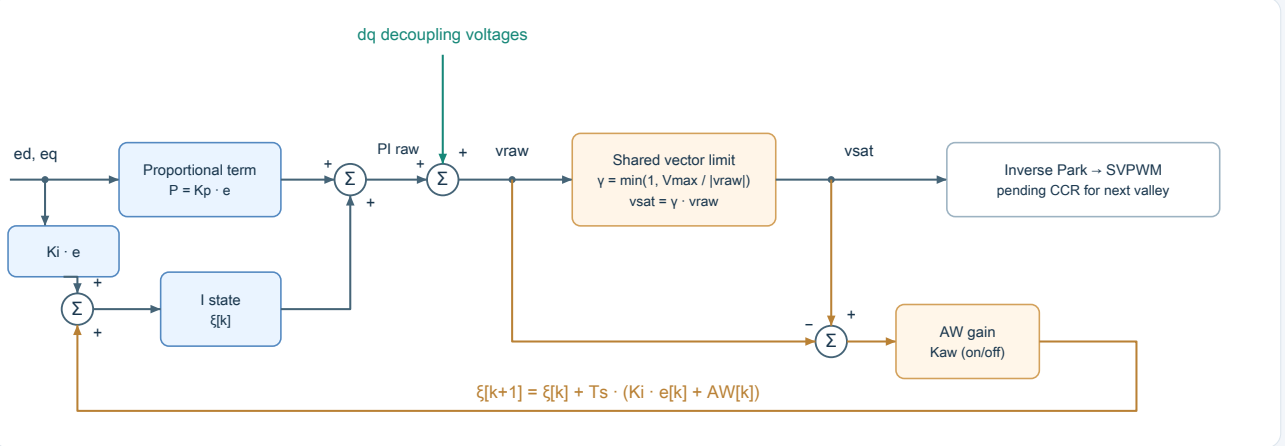
Encoder 为理想感测器： $\theta_e = (p\theta_m) \bmod 2\pi$ ；没有量化、杂讯或 observer。Park 与 Inverse Park 使用同一 ADC 事件锁存的角度。座标转换是矩阵运算，通常不以单一 scalar transfer function 表示；角度固定时可视为常数矩阵。

4.3 电流 PI、解耦与向量限幅

MOTORCONTROL LAB / EXPERIMENT MANUAL

04 / dq PI, vector voltage limit and anti-windup

Both axes share one circular voltage limit. AW uses the post-vector minus pre-vector voltage.



$V_{max} = m \cdot V_{dc} / \sqrt{3}$. Raw vector = PI raw + decoupling; AW = $K_{aw}(v_{sat} - v_{raw})$, or zero when disabled.
The integral state shown in diagnostics is $\xi[k]$, before this update. Post-vector voltage is a command, not the applied switching voltage: delay, CCR quantization, inverter switching and dead time follow.

图 04 | dq PI、共用向量电压限幅与 AW 回算。蓝色为控制器、橙色为限幅或 AW、绿色箭头为前馈；实线箭头表示讯号方向。

对 $a \in \{d, q\}$:

$$e_a = i_a^* - i_{a,held}, \quad u_{a,PI} = K_{pa} e_a + x_a.$$

启用 decoupling 时 :

$$v_{d,ff} = -\omega_e L_q i_{q,held}, \quad v_{q,ff} = \omega_e (L_d i_{d,held} + \psi_f).$$

关闭时两个前馈项为零。向量限幅前电压包含解耦项 :

$$\mathbf{v}_{raw} = \begin{bmatrix} u_{d,PI} + v_{d,ff} \\ u_{q,PI} + v_{q,ff} \end{bmatrix}, \quad V_{max} = m \frac{V_{dc}}{\sqrt{3}}, \quad \gamma = \min \left(1, \frac{V_{max}}{\|\mathbf{v}_{raw}\|} \right), \quad \mathbf{v}_{sat} = \gamma \mathbf{v}_{raw}.$$

零向量时取 $\gamma=1$ 。这是共享圆形向量限幅，不是 d、q 各自裁切 $\pm V_{max}$ 。

$$AW_a = \begin{cases} K_{aw}(v_{a,sat} - v_{a,raw}), & AW \text{ on} \\ 0, & AW \text{ off} \end{cases}$$

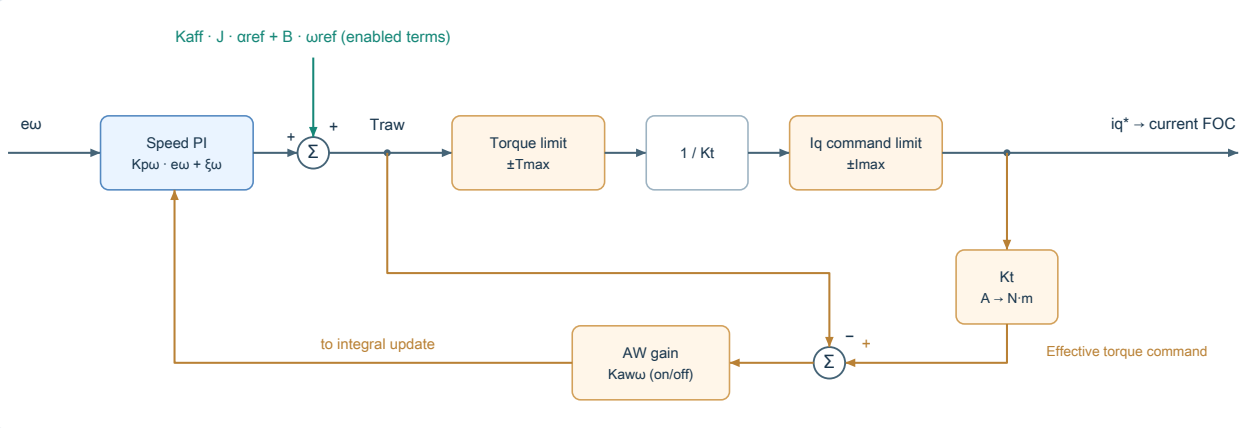
$$x_a[k+1] = x_a[k] + T_s \{ K_{ia} e_a[k] + AW_a[k] \}.$$

先用 $x[k]$ 算输出，再更新 $x[k+1]$ 。正向饱和时，AW 通常为负，抑制积分继续增长；但 I state 不一定因此变小或回到零，仍取决于 $K_i \cdot e$ 与 AW 的合成值。

4.4 Speed PI、限制与回算

05 / Speed PI and anti-windup across both command limits

The AW tracking signal is $K_t \cdot i_q^*$, not the measured electromagnetic torque.



$AW_w = K_{aww} \cdot (K_t i_q^* - T_{raw})$. Update: $\xi\omega[n+1] = \xi\omega[n] + T_w \cdot (K_{i\omega} e_\omega + AW_w)$.
Traw includes enabled reference feedforward. Voltage saturation inside the current loop is not directly included in this outer-loop tracking signal; measured i_q may still lag its command.

图 05 | Speed PI 跨转矩与电流命令限制的 AW 回算。蓝色为控制器、橙色为限幅或 AW、绿色箭头为前馈；实线箭头表示讯号方向。

$$e_\omega = \omega_{cmd} - \omega_m, \quad T_{fb} = K_{p\omega} e_\omega + x_\omega.$$

令开关 $\sigma_a, \sigma_B \in \{0,1\}$:

$$T_{raw} = T_{fb} + \sigma_a K_{aff} J \alpha_{ref} + \sigma_B B \omega_{ref},$$

$$T_{lim} = \text{clip}(T_{raw}, \pm T_{max}), \quad i_{q,raw}^* = \frac{T_{lim}}{K_t}, \quad i_q^* = \text{clip}(i_{q,raw}^*, \pm I_{max}).$$

$$AW_\omega = \begin{cases} K_{aww}(K_t i_q^* - T_{raw}), & AW \text{ on} \\ 0, & AW \text{ off} \end{cases}$$

$$x_\omega[n+1] = x_\omega[n] + T_w(K_{i\omega} e_\omega[n] + AW_\omega[n]).$$

回算同时包含转矩及电流命令限幅，并以含前馈的 Total raw 为基准。它没有直接追踪因电压不足造成的实际 i_q 落后；因此 T_{e^*} 未碰转矩 / 电流限制时，速度 AW 可能为零，即使内电流环已电压饱和。

4.5 Position P、轨迹与前馈

$$\omega_{fb} = K_{p, pos}(\theta_{ref} - \theta_m), \quad \omega_{raw} = \omega_{fb} + \sigma_v K_{vff} \omega_{ref}, \quad \omega_{cmd} = \text{clip}(\omega_{raw}, \pm \omega_{max}).$$

4.5.1 先分清位置、速度与加速度的曲线

Trajectory Generator 在 Position 模式产生的是分段位置轨迹，不是一条从头到尾使用同一组系数的抛物线。加速段的位置是二次函数，等速段的位置是一次函数，减速段的位置是另一个二次函数；运动前后位置保持常数。对应的速度是分段直线，加速度是分段常数。本版没有 S-curve / jerk 限制，加速度在阶段切换时可跳变。

本版每次从位置 $\theta=0$ 、速度=0 开始，到指定目标 θ_f 停下；不提供任意初始位置、初始速度或直接输入多项式系数的功能。定义：

$$\theta_f = \text{Target Position}, \quad D = |\theta_f|, \quad \sigma = \text{sgn}(\theta_f), \quad u = t - t_0.$$

t 是模拟时间，t0 是 UI 的 Start / Reference step time，u 是「从轨迹开始后算起」的局部时间。V 是 Max Velocity (position)，A 是 Max Acceleration，两者输入正的上限幅值；负向移动由 θ_f 的正负号决定。

$$t_a = \min\left(\frac{V}{A}, \sqrt{\frac{D}{A}}\right), \quad v_p = At_a, \quad t_c = \max\left(0, \frac{D}{v_p} - t_a\right), \quad T = T_{move} = 2t_a + t_c.$$

t_a 是加速时间，对称减速也用 t_a ； t_c 是等速时间； v_p 是实际规划峰值速度，可能小于设定的 V。 $D \leq V^2/A$ 时 $t_c=0$ ，为三角形速度轨迹； $D > V^2/A$ 时才有等速段，为梯形速度轨迹。 $D=0$ 为全程静止的特例，不使用上式的除法。规划完成时间是 t_0+T ；模拟 Duration 还应留足定位收敛时间。

4.5.2 程式实际使用的分段方程式

以下为 $D > 0$ 时的位置参考，与目前 Python trajectory 函式一致：

$$\theta_{ref}(t) = \begin{cases} 0, & u < 0, \\ \sigma \frac{A}{2} u^2, & 0 \leq u < t_a, \\ \sigma \left[\frac{A}{2} t_a^2 + v_p(u - t_a) \right], & t_a \leq u < t_a + t_c, \\ \theta_f - \sigma \frac{A}{2} (T - u)^2, & t_a + t_c \leq u < T, \\ \theta_f, & u \geq T. \end{cases}$$

二次曲线出现在上式的加速段与减速段。 $t_c=0$ 时中间的等速段长度为零，自动省略；仍有前后两段不同的二次函数，不是只使用一条二次曲线。

速度与加速度参考由同一条位置轨迹解析求导，供前馈使用：

$$\omega_{ref}(t) = \begin{cases} 0, & u < 0, \\ \sigma A u, & 0 \leq u < t_a, \\ \sigma v_p, & t_a \leq u < t_a + t_c, \\ \sigma A (T - u), & t_a + t_c \leq u < T, \\ 0, & u \geq T, \end{cases}$$

$$\alpha_{ref}(t) = \begin{cases} 0, & u < 0, \\ \sigma A, & 0 \leq u < t_a, \\ 0, & t_a \leq u < t_a + t_c, \\ -\sigma A, & t_a + t_c \leq u < T, \\ 0, & u \geq T. \end{cases}$$

位置与速度在交界处连续；加速度在交界处采右侧阶段的值，与程式的区间判断相同。上述是「参考轨迹」，不代表实际 θ_m 、 ω_m 、 $d\omega_m/dt$ 一定跟得上。

4.5.3 二次式系数如何由 UI 决定

若把每一段都写成同一个局部时间 u 的多项式：

$$\theta_{ref} = c_2 u^2 + c_1 u + c_0,$$

其系数不是独立输入，而是由 A、V、 θ_f 算出 t_a 、 t_c 、T 后决定：

阶段	c2 (rad/s ²)	c1 (rad/s)	c0 (rad)
加速	$\sigma A/2$	0	0
等速	0	σv_p	$-\sigma A \cdot t_a^2/2$
减速	$-\sigma A/2$	$\sigma A \cdot T$	$\theta_f - \sigma A \cdot T^2/2$
完成后保持	0	0	θ_f

UI 的 Max Acceleration=A 是加速度，不是二次项系数。因为位置微分两次会得到 2c2，所以加速段 $c2=\sigma A/2$ ；例如 A=100，正向加速段的二次项系数就是 50，不是 100。上述系数以 $u=t-t_0$ 表示，不要直接把 u 换成全域时间 t 而仍沿用相同系数。

UI 参数	对曲线的作用	实际设定方法
Target Position / θ_m^* continuous	决定位移大小、方向与最后位置 θ_f	Position Control 的目标位置，或 Trajectory Generator 的 Target Position；共用同一参数
Max Acceleration	设定 A，改变加速 / 减速段的曲率，即 $\pm A/2$	点 Trajectory Generator 修改；数值愈大代表规划加减速愈快
Max Velocity (position)	设定速度上限 V，影响峰值速度、是否有等速段及总时间	点 Trajectory Generator 修改；短行程不一定达到 V
Start / Reference step time	设定 t_0 ，只平移整段轨迹的开始时间	点 Target Position 修改；不改变以 u 表示的各段系数
Duration	设定模拟总长度，不是多项式系数	应涵盖 Start+Tmove，并留收敛时间；太短只会截断观察

Position Kp、Kvff、Kaff 影响回授 / 前馈如何追踪轨迹，不用来设定轨迹多项式系数。Speed profile 的 Step / Ramp 只作用于 Speed 模式，在 Position 模式不生效。

4.5.4 实验五的二次式与系数实例

实验五设定 $\theta_f=1$ rad、 $V=10$ rad/s、 $A=100$ rad/s²、 $t_0=0.02$ s。由此得到 $t_a=0.1$ s、 $t_c=0$ 、 $T=0.2$ s，局部时间为 $u=t-0.02$ ：

$$\theta_{ref}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0.02, \\ 50(t - 0.02)^2, & 0.02 \leq t < 0.12, \\ 1 - 50(0.22 - t)^2, & 0.12 \leq t < 0.22, \\ 1, & t \geq 0.22. \end{cases}$$

等价地，用 u 展开为：

$$\theta_{ref} = \begin{cases} 50u^2, & 0 \leq u < 0.1, \\ -50u^2 + 20u - 1, & 0.1 \leq u < 0.2. \end{cases}$$

加速段的 (c2,c1,c0)=(50,0,0)；减速段为 (-50,20,-1)。两段使用相同的 $u=t-0.02$ ，只是分段系数不同；不是让使用者把三个系数分别填进 UI。

模拟时间 t (s)	局部时间 u (s)	位置参考 θ_{ref} (rad)	速度参考 ω_{ref} (rad/s)
0.02	0	0	0
0.07	0.05	0.125	5
0.12	0.10	0.5	10
0.17	0.15	0.875	5
0.22	0.20	1	0

因此，想改变二次段的弯曲程度，要改 Max Acceleration；想改位移或方向，要改 Target Position；想改速度上限，要改 Max Velocity。三者仍须共同满足「从静止出发、到目标停止」的分段边界条件，不能任意指定独立 c_2 、 c_1 、 c_0 。

4.5.5 Speed 模式的 Step / Ramp

Speed Step 在起点直接改变速度参考，程式设定 $a_{ref}=0$ ，不产生理想微分脉冲前馈。Speed Ramp 则以 A 限制加速，直到速度目标。轨迹产生器及各限幅均为非线性 / 分段运算，没有涵盖全部行为的单一 LTI 传递函数。

4.6 SVPWM、Timer 与 inverter

$$v_a^* = v_\alpha^*, \quad v_b^* = -\frac{1}{2}v_\alpha^* + \frac{\sqrt{3}}{2}v_\beta^*, \quad v_c^* = -\frac{1}{2}v_\alpha^* - \frac{\sqrt{3}}{2}v_\beta^*,$$

$$v_0 = -\frac{\max(v_a^*, v_b^*, v_c^*) + \min(v_a^*, v_b^*, v_c^*)}{2}, \quad D_x = \text{clip}\left(\frac{1}{2} + \frac{v_x^* + v_0}{V_{dc}}, 0, 1\right).$$

$$ARR = \text{round}\left(\frac{f_{timer}}{2f_{requested}}\right), \quad f_{PWM,actual} = \frac{f_{timer}}{2ARR}, \quad CCR_x = \text{round}(D_x ARR).$$

CNT 为 $0 \rightarrow ARR \rightarrow 0$ 的三角载波； $S_x=1$ 当 $CNT < \text{active } CCR_x$ ，否则为 0。

$$v_{xO} = S_x V_{dc} + \Delta v_{xO}, \quad \Delta v_{xO} = -V_{dc} T_d f_{PWM} \text{sgn}(i_x), \quad v_{xn} = v_{xO} - \frac{v_{aO} + v_{bO} + v_{cO}}{3}.$$

本模型是切换波形加上周期平均 dead-time 电压扰动，没有逐一模拟互补 gate blanking、二极管压降或寄生元件。未饱和平均小讯号模型中，电压命令到平均电压可取单位增益，再单独处理 hold / 延迟；不能再额外乘一次 V_{dc} ，因为输入已是 V 。

5. 控制回路传递函数

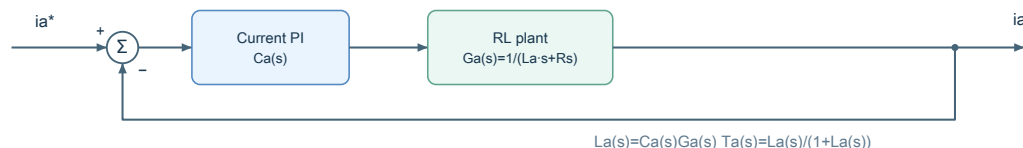
5.1 使用条件与符号

MOTORCONTROL LAB / EXPERIMENT MANUAL

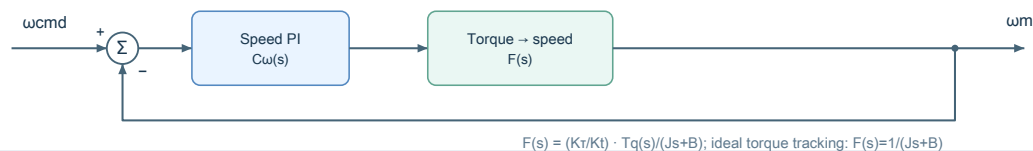
06 / Nominal feedback transfer functions

Small-signal, unsaturated models · reference feedforward omitted · ideal sensor gains

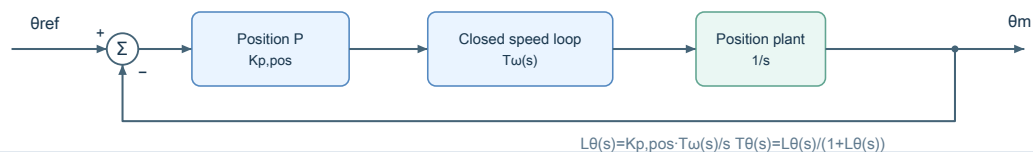
A Current loop



B Speed loop



C Position loop



Current digital model replaces $C_a G_a$ with $C_a(z) \cdot b/[z(z-a)]$, including one T_s computation delay.
Digital speed / position models use exact sampled state-space plants; see the manual appendix.

$T_q(s) = \Delta i_q / \Delta i_q^*$: q-axis closed current loop. K_t : command conversion; K_r : incremental torque gain.

See Figure 09 and Sections 4.1 / 5.4 for the expanded current-loop transfer function and torque path.

图 06 | 电流、速度与位置的名义负回授传递函数。蓝色为控制器、橙色为限幅或 AW、绿色箭头为前馈；实线箭头表示讯号方向。

以下连续模型假设理想 dq 解耦、固定名义参数、未碰限幅，并以平均电压取代 switching ripple；暂不含 ADC / 运算延迟与 dead-time 非线性。s 为 Laplace 变数；z 为离散时间变数。回授感测器名义增益 $H=1$ 。

5.2 各 Block 的数学表示速查

页面 Block	名义线性表示 / 实际运算	适用范围
Current PI d/q	$C_a(s)=K_{pa}+K_{ia}/s$; 数位 $C_a(z)=K_{pa}+K_{ia}\cdot T_s/(z-1)$	AW 与限幅另依第 4 节
PMSM electrical	$G_a(s)=1/(L_a\cdot s+R_s)$	理想解耦或零速 ; 非完整耦合 PMSM
Speed PI	$C_\omega(s)=K_{pw}+K_{iw}/s$	输入 rad/s、输出 N·m
1/Kt	常数增益 $1/(1.5p\psi_f)$	输入 N·m、输出 A
Torque production	局部 q 轴增益 K_τ	固定 d 轴工作点 ; 一般 T_e 为非线性
Mechanical speed	$G_m(s)=1/(J\cdot s+B)$	输入净电磁 / 负载转矩 ; 堵转时不使用自由机械 plant
Speed → position	1/s	连续自由转动模型 ; 离散分析精确积分位置状态
Position P	$C_\theta=K_{p,pos}$	无位置 I / AW
Velocity FF	K_{vff}	ω_{ref} →速度求和点 , 仅 Position
Acceleration FF × J	$K_{aff}\cdot J$	输入 a_{ref} 时为常数增益 ; 以 ω_{ref} 为输入才表示为 $K_{aff}\cdot J\cdot s$
Friction FF	B	ω_{ref} →转矩求和点 , 受开关控制
Encoder speed/position feedback	名义 $H=1$; θ_m →电角为 p 倍后 wrap	理想感测 ; wrap 不属单一全域 LTI 方块
Clarke / Park / Inverse Park	第 4.2 节矩阵	转角可随时间变化 , 不以单一 scalar TF 概括
ADC sample/hold	离散同步取样与保持	已纳入数位回路定义 ; 不是额外随意加的时间延迟
Computation / CCR update	z^{-1}	一个 current T_s
SVPWM / inverter	平均、未饱和电压命令通道可近似增益 1	实际为 duty 计算、量化、PWM 切换及 dead-time 扰动
Trajectory / limits / AW	分段轨迹、clip、向量缩放与状态更新	非线性运算 , 不强行赋予全域 LTI TF

5.3 d / q 电流回路

解耦后的 plant 与 PI :

$$G_d(s) = \frac{1}{L_d s + R_s}, \quad G_q(s) = \frac{1}{L_q s + R_s}, \quad C_a(s) = K_{pa} + \frac{K_{ia}}{s}.$$

$$L_a(s) = C_a(s)G_a(s) = \frac{K_{pa}s + K_{ia}}{s(L_a s + R_s)},$$

$$T_a(s) = \frac{i_a}{i_a^*} = \frac{L_a}{1 + L_a} = \frac{K_{pa}s + K_{ia}}{L_a s^2 + (R_s + K_{pa})s + K_{ia}}.$$

若 $K_{pa}=L_a \cdot \omega_c$ 、 $K_{ia}=R_s \cdot \omega_c$ ，理想连续模型可约去 RL 极点：

$$L_a(s) = \frac{\omega_c}{s}, \quad T_a(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}.$$

本版预设两轴均有 $\omega_c=1000 \text{ rad/s}$ ，因此理想频宽为 $1000/(2\pi) \approx 159.15 \text{ Hz}$ 。网页 Bode 分析区中的 d / q 电流回路频率响应 采含离散延迟模型，数值不必等于此理想值。堵转时即使关闭解耦， $\omega_e=0$ 仍使旋转耦合项消失。

上式令 $a=q$ 即为 $T_q(s)$ 。第 5.4 节会再次明确标示其输入、输出与完整展开式，避免在速度回路中把 $T_q(s)$ 误认为转矩常数。

5.4 速度回路：三种模型

先看 UI 的 Speed model 三选项对照表。这里的 Speed model 是 Bode 分析用的「速度模型」，与页面上方 Current / Speed / Position 的 Control Mode 不同。

Speed model 选项	内电流环如何处理	是否包含数位延迟
Ideal Inner Current Loop	假设电流 / 转矩即时追踪， $T_q=1$ ； 不保留内电流环动态	不考虑取样 / 运算延迟
With Current Loop Dynamics	使用连续 q 轴电流闭环；一般未约分式为二阶，目前预设极零点对消后可约成一阶	不考虑取样 / 运算延迟
With Digital Delay	同时保留电流环动态，使用离散 PI 与精确 ZOH plant	包含一个电流控制周期的运算 / CCR 更新延迟，以及已纳入的取样 / 保持效应

第三个不是只加 delay、把电流环动态拿掉，而是将两者一起纳入。它也不是把第二个的连续闭环直接乘上 $\exp(-1.5sT_s)$ ，而是由离散系统计算。1.5 T_s 是理解低频平均延迟的连续近似，详见第 5.4.2 节；不要额外重复加入目前数位模型。

选项影响范围：切换 Speed model 会改变速度 / 位置 Bode 的分析模型，不会切换时间模拟引擎。d / q 电流 Bode 一直使用第 6 节的含延迟离散模型，不会因选 Ideal 而变成理想增益 1。时间模拟仍使用同一套实际电流控制、ADC / CCR 时序与 PWM 切换模型。

以下再依序给出三种速度分析模型的公式；预设一阶约分见第 5.4.1 节，精确数位模型见第 6 节与附录。

$$C_\omega(s) = K_{p\omega} + \frac{K_{i\omega}}{s}, \quad G_m(s) = \frac{1}{Js + B}.$$

Ideal inner current loop：假定转矩即时追踪，令 $F(s)=G_m(s)$ ：

$$L_{\omega}^{ideal}(s) = \frac{K_{p\omega}s + K_{i\omega}}{s(Js + B)},$$

$$T_{\omega}^{ideal}(s) = \frac{K_{p\omega}s + K_{i\omega}}{Js^2 + (B + K_{p\omega})s + K_{i\omega}}.$$

代入预设值：

$$T_{\omega}^{ideal}(s) = \frac{0.016s + 0.32}{0.00016s^2 + 0.0160028s + 0.32}.$$

理想转矩追踪时，负载扰动的响应为：

$$\frac{\omega_m(s)}{T_L(s)} = -\frac{G_m(s)}{1 + C_{\omega}(s)G_m(s)}.$$

With current-loop dynamics：明确包含 q 轴电流闭环 $T_q(s)$

这里的 $T_q(s)$ 是「q 轴电流命令 → 实际 q 轴电流」的闭环传递函数，不是转矩常数，也不是速度闭环。下标 q 指 q 轴；比值的输入、输出都是电流，因此 $T_q(s)$ 无因次。以下各传递函数以工作点附近的增量定义：

$$T_q(s) \equiv \frac{\Delta i_q(s)}{\Delta i_q^*(s)}.$$

q 轴名义解耦电气 plant、电流 PI 与开回路分别为：

$$G_q(s) = \frac{\Delta i_q(s)}{\Delta v_q(s)} = \frac{1}{L_q s + R_s}, \quad C_q(s) = K_{pq} + \frac{K_{iq}}{s}, \quad L_q^{OL}(s) = C_q(s)G_q(s).$$

此处上标 OL 表示开回路，避免与电感 L_q 混淆。由单位负回授闭合电流环：

$$T_q(s) = \frac{C_q(s)G_q(s)}{1 + C_q(s)G_q(s)} = \frac{C_q(s)}{L_q s + R_s + C_q(s)}.$$

将电流 PI 展开，就能直接看见 K_{pq} 、 K_{iq} 与 L_q 、 R_s ：

$$T_q(s) = \frac{K_{pq}s + K_{iq}}{L_q s^2 + (R_s + K_{pq})s + K_{iq}}.$$

预设 $L_q=0.0125$ H、 $R_s=1.2$ Ω 、 $K_{pq}=12.5$ 、 $K_{iq}=1200$ ，故本版连续 q 轴闭环为：

$$T_q(s) = \frac{12.5s + 1200}{0.0125s^2 + 13.7s + 1200}.$$

5.4.1 一般为二阶；预设极零点对消后可约成一阶

上面的分母二次式是一般 PI 参数的未约分闭环形式。目前预设参数已经做名义 RL 极点与 PI 零点对消，因此此连续输入 / 输出传递函数的最小阶数是一阶。不能只停在二阶式，而忽略这个预设条件。

对消条件与预设值为：

$$\frac{K_{iq}}{K_{pq}} = \frac{R_s}{L_q}, \quad \frac{1200}{12.5} = \frac{1.2}{0.0125} = 96 \text{ s}^{-1}.$$

此时 PI 零点与电气 plant 极点同在 $s=-96 \text{ s}^{-1}$ 。将一般式因式分解：

$$\begin{aligned} T_q(s) &= \frac{12.5s + 1200}{0.0125s^2 + 13.7s + 1200} \\ &= \frac{12.5(s + 96)}{0.0125(s + 96)(s + 1000)} \\ &= \boxed{\frac{1000}{s + 1000} = \frac{1}{0.001s + 1}}. \end{aligned}$$

一般化地，在精确对消条件下：

$$C_q(s)G_q(s) = \frac{K_{pq}}{L_q s} = \frac{\omega_c}{s}, \quad T_q(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}, \quad \omega_c = \frac{K_{pq}}{L_q}.$$

所以预设 $\omega_c=1000 \text{ rad/s}$ 、时间常数 $1/\omega_c=1 \text{ ms}$ 、连续无延迟 -3 dB 频宽约 $1000/(2\pi)=159.15 \text{ Hz}$ 。这是零初始条件下的传递函数约分，不是删除模拟器的积分器或马达状态。若改过 PI、 R_s 或 L_q 而未维持对消条件，就应回到一般二阶式；参数误差、未完全解耦、数位取样及延迟也会使理想结果不再精确适用。

这里的一阶 $T_q(s)$ 仍是 With current-loop dynamics 的「无延迟连续模型」。下一个延迟说明小节会解释，为何加进回路内的延迟后，不能直接宣称整个闭环仍是这个无延迟一阶式。

先分开看 $1/K_t$ 、 $T_q(s)$ 、 K_τ 与 $G_m(s)$ 四个方块，再合并成速度 PI 所见的 $F(s)$ ：转矩命令先以 $1/K_t$ 换算成电流命令，电流闭环 $T_q(s)$ 产生实际 i_q ，马达以 K_τ 转成电磁转矩，最后经机械动态 $G_m(s)$ 产生速度。此为忽略限幅、前馈与负载扰动输入的名义回授分析路径。

$$\Delta T_e^* \xrightarrow{1/K_t} \Delta i_q^* \xrightarrow{T_q(s)} \Delta i_q \xrightarrow{K_\tau} \Delta T_e \xrightarrow{G_m(s)} \Delta \omega_m.$$

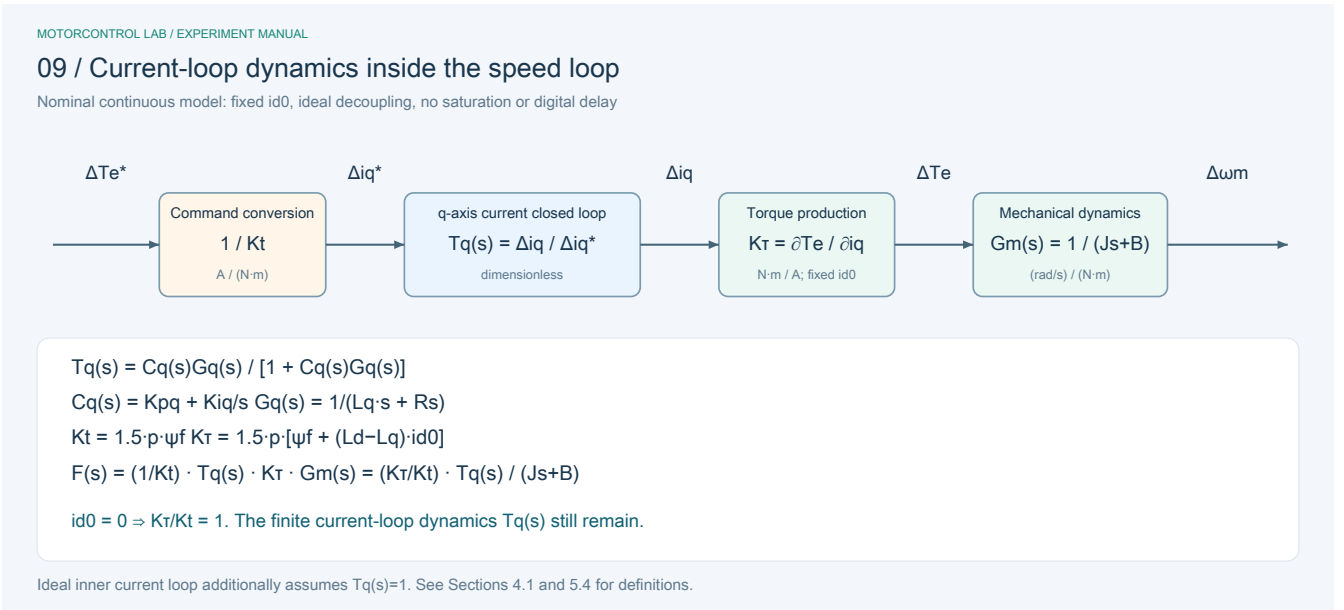


图 09 | $T_q(s)$ 表示命令电流到实际电流的闭环响应； $1/K_t$ 是命令换算， K_τ 是固定 d 轴工作点的马达增量转矩增益。

$$F(s) \equiv \frac{\Delta \omega_m(s)}{\Delta T_e^*(s)} = \frac{1}{K_t} T_q(s) K_\tau G_m(s) = \frac{K_\tau}{K_t} T_q(s) \frac{1}{J s + B}.$$

在外速度单位负回授下：

$$L_{\omega}(s) = C_{\omega}(s)F(s), \quad T_{\omega}(s) = \frac{\Delta\omega_m(s)}{\Delta\omega_m^*(s)} = \frac{C_{\omega}(s)F(s)}{1 + C_{\omega}(s)F(s)}.$$

Kt、K_τ 的正式定义与线性化条件见第 4.1 节。目前 Speed / Position 的名义工作点 id0=0，所以 K_τ/Kt=1，但仍有：

$$F(s) = T_q(s)G_m(s) \neq G_m(s) \quad (\text{一般情况})。$$

因此，消掉的是 K_τ/Kt，比值为 1；并没有消掉 T_q(s)。只有选择 Ideal inner current loop、假设电流 / 转矩即时追踪时，才令 T_q(s)=1。With current-loop dynamics 使用上述连续电流闭环，忽略取样 / 运算延迟；其模型假设为名义理想 dq 解耦、未饱和、固定 d 轴工作点，不包含 dead-time、CCR 量化、限幅或 AW 非线性。时间模拟仍使用完整切换 / 控制模型。

With digital delay：含离散 current PI、一个电流控制周期运算延迟、精确 held-voltage plant 及外环多速率保持，不能直接套用上述连续二阶式。完整定义见第 6 节与附录。

5.4.2 延迟的连续近似：为何常见 1.5Ts，而不是再多一个完整周期

本节是教学用的连续平均 / 低频近似，不是新增 UI 模型，也没有改写目前 With digital delay 的精确离散计算。

以下 Ts 指电流回路的控制周期；目前每 PWM 周期取样、更新一次，因此 Ts=TPWM。令 Td,eq 代表总等效控制延迟，与功率级的 Dead Time / dead-time 死区时间不同。

核对本版程式时序：valley k 先套用上一轮 pending CCR，再锁存 ADC[k]；以此资料算出的新 duty / CCR[k+1]，要到 valley k+1 才启用。因此，从 ADC[k] 到新 CCR 生效是一个 Ts，包含计算、传递与等待下一个更新点的整体排程延迟；不是另外量到 CPU 一定需要运算整整 Ts。浏览器显示的 Simulation Cost 也不是此控制延迟。

项目	本版的意义	连续平均 / 低频近似
取样到新 CCR 生效	ADC[k] → pending CCR[k+1] → 下一个 valley 套用	Ts
PWM / 命令保持的等效延迟	新 duty 在一个 PWM 周期内形成平均作用；以 ZOH / single-rate PWM 近似	Ts/2
合计	以上两个不同作用的合并近似	Td,eq≈1.5Ts

不能解读成「算一个 Ts，再等另一个完整 PWM 周期」。下一个 valley 才启用新 CCR 的这一次等待，已包含在第一列的 Ts 里；第二列是保持 / 调变的等效半周期，不是额外的一拍暂存器。如果真的另有第二拍延迟，模型就必须另外辨识，不能仍套用本版的 1.5Ts。

从平均命令到平均输出的连续重建模型，可将一拍延迟与正规化 ZOH 写为：

$$D_{avg}(s) = e^{-sT_s} \frac{1 - e^{-sT_s}}{sT_s}.$$

ZOH 的频率响应可拆成幅值项与半周期相位项：

$$\frac{1 - e^{-j\omega T_s}}{j\omega T_s} = e^{-j\omega T_s/2} \frac{\sin(\omega T_s/2)}{\omega T_s/2}.$$

当 ωT_s 足够小，可近似忽略 sinc 幅值下降，故常用：

$$D_{avg}(s) \approx e^{-sT_{d,eq}}, \quad T_{d,eq} \approx T_s + \frac{T_s}{2} = 1.5T_s.$$

这不是说所有同步取样系统都必然是 $1.5T_s$ ：结果仍取决于取样相位、更新点、运算能否赶上更新，以及 single-rate / double-rate 等配置。本版采 valley 取样与下一个 valley 生效，所以适用上述一拍加半周期的平均近似；未另加感测器、类比滤波或 ADC 转换延迟。

本版预设的实际时间换算：fPWM=10 kHz、ARR=5000、timer=100 MHz，所以：

$$T_s = \frac{2ARR}{f_{timer}} = 100 \mu s, \quad T_{d,eq} \approx 150 \mu s = 0.15 \text{ ms}.$$

因此是 1.5 倍 T_s ，不是 1.5 ms；只有 $T_s=1 \text{ ms}$ 时， $1.5T_s$ 才等于 1.5 ms。预设电流闭环的一阶时间常数 1 ms，与这里的等效延迟 0.15 ms，也不是同一个量。当 fPWM / ARR 改变时应以实际 T_s 重算；speedDiv#1 时，外环多速率模型不能直接换成 1.5 个速度周期。

延迟应放在哪里？放在电流回授回路内的致动通道。在上述连续近似下：

$$L_{q,d}(s) \approx C_q(s)G_q(s)e^{-sT_{d,eq}}, \quad T_{q,d}(s) \approx \frac{C_q(s)G_q(s)e^{-sT_{d,eq}}}{1 + C_q(s)G_q(s)e^{-sT_{d,eq}}}.$$

预设 PI 与 RL 极零点对消后， $C_qG_q=\omega_c/s$ ，仍可化为：

$$T_{q,d}(s) \approx \frac{\omega_c e^{-sT_{d,eq}}}{s + \omega_c e^{-sT_{d,eq}}}.$$

分母也含延迟，所以它不再是单纯的无延迟一阶有理式。不可把上式当成下列「无延迟闭环完成后才加输出延迟」的模型；两者的回授特征方程不同：

$$\frac{\omega_c e^{-sT_{d,eq}}}{s + \omega_c e^{-sT_{d,eq}}} \neq \frac{\omega_c}{s + \omega_c} e^{-sT_{d,eq}}.$$

例如 $\omega=1000 \text{ rad/s}$ 、 $T_{d,eq}=150 \mu s$ 时，这个延迟因子带来约 $-0.15 \text{ rad}=-8.59^\circ$ 的额外相位，会减少相位裕度。若只看无延迟的一阶电流闭环，便看不到这项回授稳定性的影响。

与目前 UI 的对照：With current-loop dynamics 保留无延迟连续 $T_q(s)$ ；With digital delay 使用第 6 节的离散 PI、一拍延迟与精确 ZOH plant，速度 / 位置环另以状态空间处理多速率。该数位模型已含这些效应，不得再额外乘一次 $\exp(-1.5sT_s)$ ，也不得再加一次半周期，否则会重复计入延迟。本节的 $1.5T_s$ 只是用来理解其低频平均相位效应，并不取代精确数位模型。

参考：imperix：取样、控制更新与 PWM 调变延迟的区分；本版时序以 simulation.py 的 CCR queue 与 ui-2.js 的数位 Bode 实作核对。

5.5 位置回路

先将速度回授闭合，令其闭环为 $T\omega(s)$ 。外位置 P 为 $C\theta=K_p \text{pos}$ ，速度到位置为 $1/s$ ：

$$L_{\theta}(s) = K_{p,pos} \frac{T_{\omega}(s)}{s}, \quad T_{\theta}(s) = \frac{\theta_m}{\theta_{ref}} = \frac{K_{p,pos} T_{\omega}(s)}{s + K_{p,pos} T_{\omega}(s)}.$$

若速度闭环可近似为 1，则 $T_{\theta} \approx K_{p,pos}/(s + K_{p,pos})$ ，预设理想位置频宽约 $15/(2\pi) = 2.39$ Hz。这只是内环足够快、未限速时的近似。

使用理想电流 / 转矩追踪、但保留 Speed PI 动态时：

$$T_{\theta}(s) = \frac{K_{p,pos}(K_{p\omega}s + K_{i\omega})}{Js^3 + (B + K_{p\omega})s^2 + (K_{i\omega} + K_{p,pos}K_{p\omega})s + K_{p,pos}K_{i\omega}}.$$

预设：

$$T_{\theta}(s) = \frac{0.24s + 4.8}{0.00016s^3 + 0.0160028s^2 + 0.56s + 4.8}.$$

5.6 前馈对「命令追踪」的影响

定义 $F(s)$ 为从合成转矩命令到速度的名义 plant，并令：

$$Q(s) = \sigma_a K_{aff} Js + \sigma_B B, \quad K_v = \sigma_v K_{vff}.$$

对平滑轨迹， $a_{ref} = s\omega_{ref}$ 、 $\omega_{ref} = s\theta_{ref}$ ，未限幅时：

$$\frac{\omega_m}{\omega_{ref}} = \frac{F(s)[C_{\omega}(s) + Q(s)]}{1 + F(s)C_{\omega}(s)}.$$

Position 模式则为：

$$\frac{\theta_m}{\theta_{ref}} = \frac{F(s)\{C_{\omega}(s)[K_{p,pos} + K_v s] + Q(s)s\}}{s + F(s)C_{\omega}(s)[s + K_{p,pos}]}.$$

前馈改变命令到输出的分子，回授特征方程不变，因此在这个未饱和线性模型下， K_{vff} / K_{aff} 不改变 feedback PM / GM，但可能改变 Command-Tracking Bandwidth。

页面的 Command Tracking 是轨迹输出参考到实际输出的分析，不是「目标数字经非线性轨迹产生器」的整体传递函数。Speed Step 在时间模拟中 $a_{ref} = 0$ ，所以不能把它与含 J s 前馈的平滑参考 Bode 直接当成同一个 step response。

6. 数位控制与 PWM 时序

6.1 与引擎一致的离散 PI

未饱和时，输出与积分更新顺序为：

$$u[k] = K_p e[k] + x[k], \quad x[k+1] = x[k] + K_i T_s e[k].$$

因此：

$$C(z) = K_p + \frac{K_i T_s}{z-1}.$$

此处不能任意改成 $K_p + K_i T_s \cdot z/(z-1)$ ，两者输出 / 积分时序不同。速度 PI 将 T_s 换为 T_ω 。

6.2 连续 RL、前端 ZOH 与数位电流回路的完整推导

6.2.1 实际 plant 仍是连续的；ZOH 位在 plant 前端

数位的是 PI 的运算与取样讯号，不是把实际马达变成数位元件。以名义理想解耦的单一电流轴为例，令轴别 $\ell \in \{d, q\}$ ，连续电气方程为：

$$L_\ell \frac{di_\ell(t)}{dt} + R_s i_\ell(t) = v_\ell(t), \quad G_\ell(s) = \frac{I_\ell(s)}{V_\ell(s)} = \frac{1}{L_\ell s + R_s}.$$

L_ℓ 是电感，单位 H； $G_\ell(s)$ 才是连续 RL 受控体的电压到电流传递函数。此名义方程假设 dq 解耦成立，忽略饱和、dead-time、切换谐波与未抵消的耦合 / 反电动势扰动。

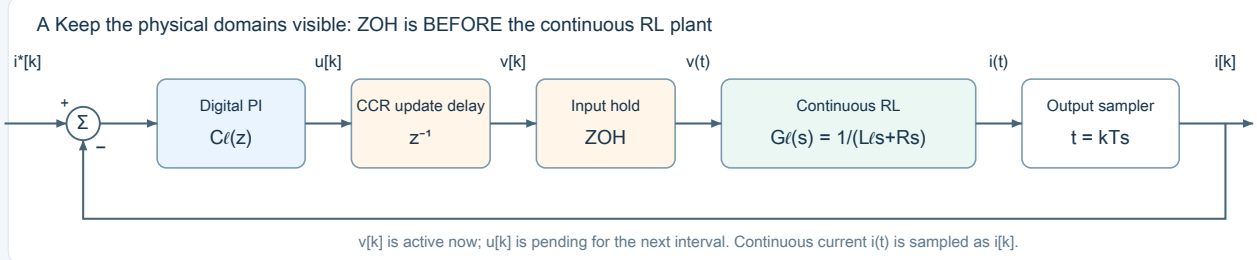
输入命令序列 $v_\ell[k]$ 经前端保持器 ZOH 变成连续时间的分段常数电压 $v_\ell(t)$ ，再作用于连续 RL；输出端 ADC 在 kT_s 取样，得到 $i_\ell[k]$ 。所以应分成：

离散电压序列 → 前端 ZOH → 连续 RL → 输出取样 → 离散电流序列。

后文的 $G_{\ell, \text{hold}}(z)$ 是上述「ZOH + 连续 RL + 输出取样」整组的离散等效，不是说连续马达本体已变成离散 plant，也不是把 ZOH 移到 RL 后面。本版实际时间模拟仍计算 PWM 切换与连续状态的数值积分；Bode 这里则用平均电压保持来建立名义线性模型，不能把实际切换电压误认为每周期完全平坦。

10 / Continuous plant and its discrete equivalent

Nominal decoupled average-voltage model; actual PWM switching is not drawn as a constant voltage.



乘积微分法则则给出：

$$\frac{d}{d\tau} [\mu(\tau)\tilde{i}(\tau)] = \mu(\tau) \frac{d\tilde{i}}{d\tau} + \frac{d\mu}{d\tau} \tilde{i}(\tau).$$

对照两式，要让左边完全相同，就选择 $d\mu/d\tau=r\mu$ 。取最简单的解 $\mu(\tau)=\exp(r\tau)$ 即可，因为指数函数的导数正好是 $r \exp(r\tau)$ 。乘上任意非零常数也可以，但最后会消掉，因此取常数为 1。这个因子是由乘积微分法则决定的，不是任意猜一个指数。

步骤 2 | 乘上积分因子 $\exp(r\tau)$ 。使用乘积微分法则，左边两项恰好可以合成一个完整导数：

$$e^{r\tau} \frac{d\tilde{i}}{d\tau} + r e^{r\tau} \tilde{i} = \frac{v[k]}{L} e^{r\tau},$$

$$\frac{d}{d\tau} [e^{r\tau} \tilde{i}(\tau)] = \frac{v[k]}{L} e^{r\tau}.$$

这一步就是指数函数出现的原因：RL 自然响应的一阶衰减率是 $r=Rs/L$ ，而 $\exp(r\tau)$ 可以把原方程整理成容易积分的形式。

步骤 3 | 从本周期起点 0 积分到下一个取样点 T_s 。左边积分后只剩端点值；右边利用 $v[k]$ 是常数：

$$\left[e^{r\tau} \tilde{i}(\tau) \right]_0^{T_s} = \frac{v[k]}{L} \int_0^{T_s} e^{r\tau} d\tau.$$

左边的定积分怎么算？令 $F(\tau)=\exp(r\tau)\tilde{i}(\tau)$ 。微积分基本定理说明：「导数从 0 到 T_s 的积分，等于原函数在上限的值减去下限的值」。因此逐项写开为：

$$\begin{aligned} \int_0^{T_s} \frac{d}{d\tau} [e^{r\tau} \tilde{i}(\tau)] d\tau &= \left[e^{r\tau} \tilde{i}(\tau) \right]_0^{T_s} \\ &= e^{rT_s} \tilde{i}(T_s) - e^{r \cdot 0} \tilde{i}(0) \\ &= e^{rT_s} i[k+1] - i[k]. \end{aligned}$$

方括号的下标 0、上标 T_s 表示「代入 T_s ，再减去代入 0」，不是再乘上 T_s 。因为 $\exp(0)=1$ ，所以第二项只剩 $i[k]$ 。局部时间 $\tau=0$ 是第 k 周期的起点，不代表电流为零；只有另行指定零初始条件时， $i[k]$ 才可能是零。

请留意容易看错的符号：左边是 $\exp(rT_s) \cdot i[k+1] - i[k]$ ，不是 $i[k+1]/(rT_s) - i[k]$ 。系数 $1/r$ 会出现在右边指数函数的反导函数里，两边的计算来源不同。

右边的积分怎么算？ $v[k]/L$ 在本周期固定，可以移到积分号外。因为 $d[\exp(r\tau)/r]/d\tau=\exp(r\tau)$ ，所以：

$$\int_0^{T_s} e^{r\tau} d\tau = \left[\frac{e^{r\tau}}{r} \right]_0^{T_s} = \frac{e^{rT_s} - 1}{r}.$$

因为 $Lr=Rs$ ，并代入端点 $\tilde{i}(0)=i[k]$ 、 $\tilde{i}(T_s)=i[k+1]$ ，得到：

$$e^{rT_s} i[k+1] - i[k] = \frac{v[k]}{Lr} (e^{rT_s} - 1) = \frac{v[k]}{R_s} (e^{rT_s} - 1).$$

步骤 4 | 两边乘 $\exp(-rT_s)$ ，再整理成「下一点 = 旧电流衰减后的值 + 本期输入作用」。

$$\begin{aligned} i[k+1] &= e^{-rT_s} i[k] + \frac{1 - e^{-rT_s}}{R_s} v[k] \\ &= e^{-R_s T_s / L} i[k] + \frac{1 - e^{-R_s T_s / L}}{R_s} v[k]. \end{aligned}$$

现在把 $i[k]$ 前面的系数命名为 a ，把 $v[k]$ 前面的系数命名为 b ，便得到所求的差分方程：

$$\boxed{i[k+1] = a i[k] + b v[k]}, \quad \boxed{a = e^{-R_s T_s / L}, \quad b = \frac{1 - e^{-R_s T_s / L}}{R_s} = \frac{1 - a}{R_s}}.$$

a 不是凭空指定的系数，而是原本电流经过一个 T_s 后剩下的比例； b 是本周期保持电压对下个电流样本的作用系数。 a 是无因次， b 的单位是 A/V，故两项最后都是电流。

也可以用电气时间常数 $\tau_e = L/R_s$ 来读这个结果：

$$\tau_e = \frac{L}{R_s}, \quad a = e^{-T_s / \tau_e}, \quad i[k+1] = a i[k] + (1 - a) \frac{v[k]}{R_s}.$$

其中 $v[k]/R_s$ 是「若本期电压一直保持下去，电流最终会趋近的稳态值」。上式说明：一个周期后的电流，保留 a 倍旧电流，同时往新的稳态值前进 $1-a$ 的比例。正参数下 $0 < a < 1$ ，因此这不是把电流瞬间跳到 $v[k]/R_s$ 。

步骤 5 | 对回本章符号与 UI 预设值。本小节的 a 、 b ，就是第 ℓ 轴的：

$$a = \rho_\ell = e^{-R_s T_s / L_\ell}, \quad b = \beta_\ell = \frac{1 - \rho_\ell}{R_s}, \quad i_\ell[k+1] = \rho_\ell i_\ell[k] + \beta_\ell v_\ell[k].$$

以 q 轴 $R_s = 1.2 \, \Omega$ 、 $L_q = 0.0125 \, \text{H}$ 、 $T_s = 100 \, \mu\text{s}$ 为例，电气 RL 时间常数 $L_q/R_s \approx 10.4167 \, \text{ms}$ ， $a \approx 0.9904459329$ ， $b \approx 0.0079617226 \, \text{A/V}$ 。注意，这是连续 RL plant 的电气时间常数，不是先前 PI 极零点对消后的闭环时间常数 $1 \, \text{ms}$ ，也不是等效延迟 $0.15 \, \text{ms}$ 。

本周期条件	下一个样本的结果	系数的意义
$v[k]=0$ ， $i[k]=1 \, \text{A}$	$i[k+1]=a \cdot 1 \, \text{A} \approx 0.9904459329 \, \text{A}$	a 表示没有外加电压时，电流自然衰减后留下的比例
$v[k]=1 \, \text{V}$ ， $i[k]=0$	$i[k+1]=b \cdot 1 \, \text{V} \approx 0.0079617226 \, \text{A}$	b 表示一个保持周期内， $1 \, \text{V}$ 电压从零电流产生的电流变化

到此仍未加入额外一拍 CCR 更新延迟。此处 $v[k]$ 是当期已经生效的保持电压。若改成 PI 新算出的 $u[k]$ ，再依第 6.2.4 节代入 $v[k]=u[k-1]$ ；不要在求 a 、 b 的这一步把两种命令混在一起。

6.2.3 对差分方程取 z 转换，得到 $\beta/(z-\rho)$

令初始电流为零，并以 $I_\ell(z)$ 、 $V_\ell(z)$ 表示 $i_\ell[k]$ 、 $v_\ell[k]$ 的 z 转换。因为 $i_\ell[k+1]$ 的转换是 $zI_\ell(z)$ ，所以上式变成：

$$zI_\ell(z) = \rho_\ell I_\ell(z) + \beta_\ell V_\ell(z).$$

移项并取输出 / 输入比值：

$$(z - \rho_\ell)I_\ell(z) = \beta_\ell V_\ell(z), \quad \boxed{G_{\ell,hold}(z) \equiv \frac{I_\ell(z)}{V_\ell(z)} = \frac{\beta_\ell}{z - \rho_\ell}}.$$

到这一步，尚未加入额外的计算 / CCR 更新延迟。这个模型的输入是当期就已生效的 $v_\ell[k]$ ；电流从 $i_\ell[k]$ 演化到下一次取样 $i_\ell[k+1]$ ，正是连续 RL 在一个保持区间内的作用。

同一式也可写成：

$$G_{\ell,hold}(z) = \frac{\beta_\ell z^{-1}}{1 - \rho_\ell z^{-1}}.$$

这是相同传递函数的两种代数写法，不是看到这里的 z^{-1} 就再多算一次 CPU 延迟；它来自状态差分式的时间索引与受控体演化。额外的排程延迟要看「当期计算的新命令是否在当期生效」，下一节才加入。

6.2.4 为何总分母又多一个 z ？因为新命令下一个周期才生效

现在区分两个不同的电压序列：

符号	意义	本版时序
$u_\ell[k]$	PI 在第 k 次取样后算出的新电压命令	pending，要给下一个周期
$v_\ell[k]$	第 k 个周期实际送进前端 ZOH 的生效电压命令	active，来自上一轮的 $u_\ell[k-1]$

因此，本版「下一个 valley 才套用」的规则就是：

$$v_\ell[k] = u_\ell[k-1], \quad V_\ell(z) = z^{-1}U_\ell(z).$$

这里才是额外的一拍 CCR 更新延迟。原本的 $G_{\ell,hold}(z)$ 是从 V_ℓ 到 I_ℓ ；若现在改问「新算出的 U_ℓ 到量到的 I_ℓ 」，便必须乘上 $V_\ell/U_\ell=1/z$ ：

$$\boxed{\frac{I_\ell(z)}{U_\ell(z)} = \frac{1}{z} \frac{\beta_\ell}{z - \rho_\ell} = \frac{\beta_\ell}{z(z - \rho_\ell)}}.$$

所以原图里「分母额外的 z 」不是凭空出现、不是因为电感多了一个状态，也不是再做一次 ZOH；它来自新算的命令要延后一个 T_s 才能进入原本的保持器。把 $v_\ell[k]=u_\ell[k-1]$ 直接代回状态式，也会得到同样结果：

$$i_\ell[k+1] = \rho_\ell i_\ell[k] + \beta_\ell u_\ell[k-1].$$

用最前面几个样本看差别。令初始电流与旧命令皆为零，并从 $k=0$ 起施加固定的新电压测试命令 $U_0=1\text{ V}$ ；此例只测电压到电流通道，先不闭合 PI：

取样时刻	新命令当期立即生效，没有额外一拍延迟	新命令下一期才生效，本版时序
$k=0, t=0$	$i[0]=0$	$i[0]=0$
$k=1, t=T_s$	$i[1]=\beta_\ell U_0$	$i[1]=0$ ，第一个周期仍用旧电压 0
$k=2, t=2T_s$	$i[2]=\beta_\ell(1+\rho_\ell)U_0$	$i[2]=\beta_\ell U_0$

这个「第一个非零电流样本再晚一格」就是两个传递函数之间额外 $1/z$ 的效果。它与 RL 自身需要经过时间才改变电流，是两件应分开辨认的事。

6.2.5 再把离散 PI 接回去，才得到开回路与闭回路

第 6.1 节已定义本版先输出、后更新积分的控制器：

$$C_\ell(z) = K_{p\ell} + \frac{K_{i\ell}T_s}{z-1}.$$

令 $E_\ell(z) = I_\ell^*(z) - I_\ell(z)$ ，PI 输出 $U_\ell(z) = C_\ell(z)E_\ell(z)$ 。沿著「PI → 一拍延迟 → ZOH / RL / 输出取样」的负回授回路相乘：

$$\mathcal{L}_\ell(z) = C_\ell(z) \frac{1}{z} G_{\ell,hold}(z) = \left(K_{p\ell} + \frac{K_{i\ell}T_s}{z-1} \right) \frac{\beta_\ell}{z(z-\rho_\ell)}.$$

这里使用花体 $\mathcal{L}(z)$ 代表开回路，以免和电感 L_ℓ 混淆。单位负回授闭合后：

$$T_\ell(z) \equiv \frac{I_\ell(z)}{I_\ell^*(z)} = \frac{\mathcal{L}_\ell(z)}{1 + \mathcal{L}_\ell(z)}.$$

在 Bode 分析时，以 $z = \exp(j\omega T_s)$ 、 $\omega = 2\pi f$ 评估频率响应。此离散等效描述的是取样时刻的电流响应；没有声称整个取样区间内的连续电流变成一阶阶的常数。

ZOH 与额外一拍已经各算一次。不应再在 $\mathcal{L}(z)$ 上重复加入半个 PWM 周期或 $\exp(-1.5sT_s)$ 。第 5.4.2 节的 $1.5T_s$ 是另一种连续低频平均近似，不能再叠加到这个精确取样模型上。

6.2.6 旧版符号对照与预设 q 轴数值

旧版的「a 轴」原意是泛指 $a \in \{d, q\}$ ，不是三相 abc 的 a 相；旧版又同时用 L_a 表示电感与开回路，容易混淆。本节改用以下清楚分开的记号：

旧版符号	本节记号	真正意义
L_a ，没有 (z)	L_ℓ	d 或 q 轴电感，单位 H
aa	ρ_ℓ	$e^{(-R_sT_s/L_\ell)}$ ，状态衰减系数
ba	β_ℓ	$(1-\rho_\ell)/R_s$ ，保持电压的离散输入系数
$L_a(z)$	$\mathcal{L}(z)$	整个电流负回授回路的开回路传递函数，不是电感
$G_a, ZOH(z)$	$G_{\ell,hold}(z)$	前端 ZOH + 连续 RL + 输出取样的等效，尚未包含额外一拍更新延迟

以预设 q 轴 $R_s = 1.2 \Omega$ 、 $L_q = 0.0125 \text{ H}$ 、 $T_s = 100 \mu\text{s}$ 为例：

$$\rho_q = e^{-0.0096} \approx 0.9904459329, \quad \beta_q = \frac{1 - \rho_q}{1.2} \approx 0.0079617226 \text{ A/V}.$$

因此，从已生效电压 V_q 到取样电流 I_q 是 $\beta q/(z-pq)$ ；从当期新算出的电压 U_q 到 I_q 才是 $\beta q/[z(z-pq)]$ 。切换 d 轴时，只需改用 L_d 、 K_{pd} 、 K_{id} ，推导方式相同。

6.2.7 「网页上的电流回路 Bode 图」到底是什么

旧文简写的「页面电流 Bode」不是一个特殊物理量，这个用语确实不够清楚。它的完整意思是：MotorControl Lab 网页的 Loop Bode Analysis 区域，针对 d 轴与 q 轴电流控制回路显示的幅频 / 相频曲线。Bode 是频率响应图，不是某一种「页面电流」。

图表中的 D-axis current loop、Q-axis current loop，各自用本节的 $\mathcal{N}(z)$ 计算开回路，并用 $T(z)=\mathcal{N}/(1+\mathcal{N})$ 计算闭环回路。这些曲线是名义模型的分析结果，不是直接从电流时间波形做 FFT 得到；也不是三相 a 相电流本身。

它们一直使用本节的含延迟离散模型，不会因 Speed model 选 Ideal Inner Current Loop 就变成 $T_q=1$ ；Speed model 只切换速度 / 位置 Bode 所采的内环模型。这些名义分析仍忽略切换 ripple、dead-time、限幅与 AW 的非线性。

推导概念可对照 MathWorks：ZOH 的连续 / 离散等效 与 Unit Delay：一拍对应 z^{-1} 。

6.3 Valley k 的事件顺序

1. 套用上一个 valley 计算的 pending CCR，成为 active CCR[k]。
2. 同步锁存相电流与 Encoder angle，产生 ADC[k]。
3. 需要时更新位置 / 速度控制器。
4. 执行 Clarke、Park、current PI、解耦、向量限幅、Inverse Park、SVPWM。
5. 计算 pending CCR[k+1]；到下一个 valley 才启用。
6. 本周期 plant 由 active CCR[k] 对应的 switching voltage 驱动。

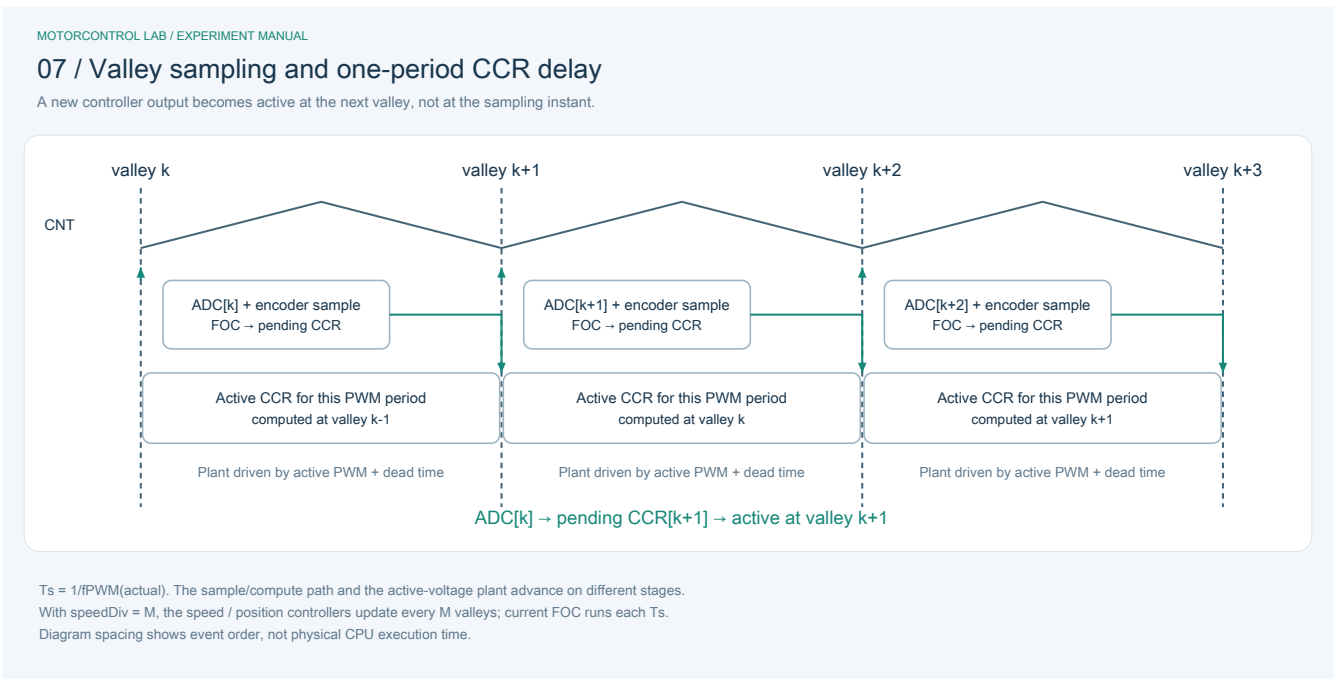


图 07 | Valley 取样、pending CCR 与下一周期套用时序。蓝色为控制器、橙色为限幅或 AW、绿色箭头为前馈；实线箭头表示讯号方向。

预设 $M=1$ ，速度与电流 PI 都以 10 kHz 更新；增加 speedDiv 仅降低外环更新频率。数位速度模型没有再加一个额外外环运算延迟；其转矩输出于外环更新后送进当次 current FOC，而 current FOC 仍有既定一周期延迟。

7. 波形与诊断读法

7.1 控制响应 / Overview

波形	讯号与单位	读法
Speed response	Speed ref、Speed actual ; rpm	ref 是限幅后 ω_{cmd} 换算为 rpm，不一定等于原始速度目标；Current Mode 隐藏此图
dq current control	I_d 、 I_q 、 I_d 、 I_q ; A	实际 dq 状态与有效命令； i_q^* 已经 q 电流限制
Three-phase currents	i_a 、 i_b 、 i_c ; A	实际瞬时相电流；堵转时不一定是随时间旋转的三相正弦
Electromagnetic torque / load	T_e raw、 T_e limited、 T_e actual、 T_L ; N·m	命令、转矩限制与实际转矩；Current Mode 的速度环转矩命令为旁路值，不当当作实际转矩目标
Position servo	θ_m^* 、 θ_m ; rad	θ_m^* 是轨迹 θ_{ref} ，不是瞬间跳到最终 target；仅 Position
Trajectory speed / command	ω_{ref} 、 ω_m 、 ω_{cmd} ; rad/s	区分规划速度、实际速度、含位置修正与限速的命令
Trajectory acceleration	α_{ref} ; rad/s ²	前馈使用的规划加速度；不是实际 $d\omega_m/dt$
Torque command contributions	T_e feedback、 $J\alpha$ FF、 $B\omega$ FF、Total raw、Limited ; N·m	前馈曲线已包含其开关与增益
Position following error	$\theta_{ref}-\theta_m$; rad	相对移动中的轨迹误差，而不是 final target- θ_m

电流控制模式即使 i_q 为常数， T_e 仍可能受 i_d 、 L_d-L_q 及 ripple 影响。不要用「速度没变」推论堵转时没有电磁转矩。

7.2 Sensored feedback chain

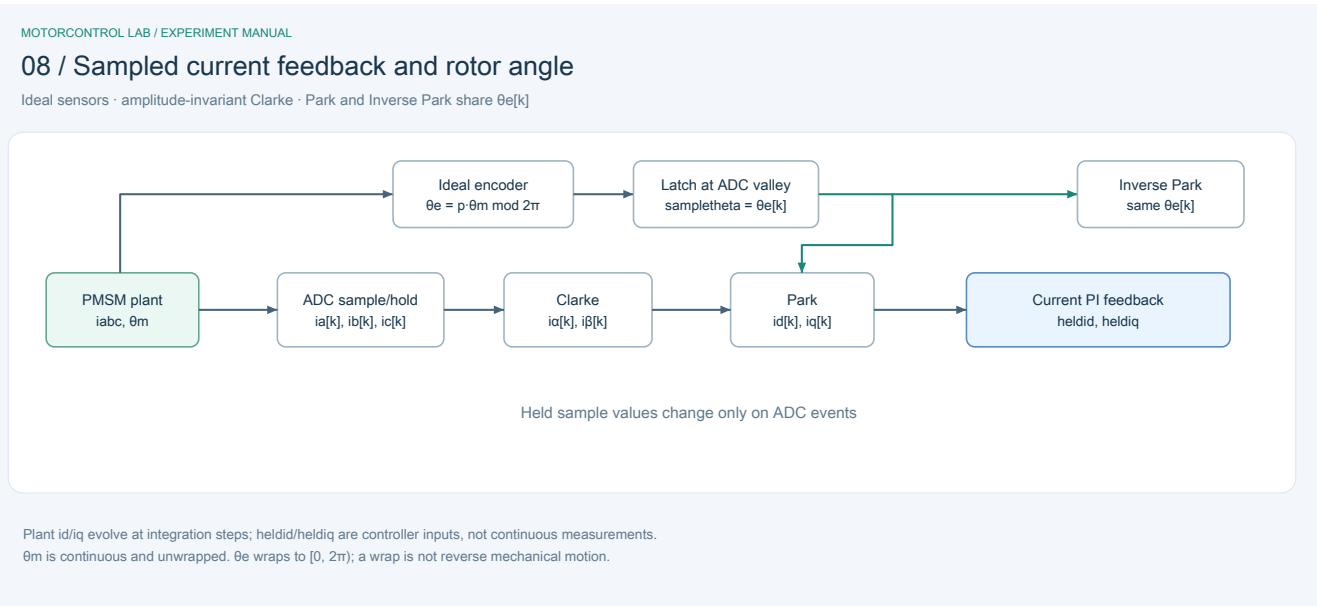


图 08 | ADC、Clarke、Park 与同步锁存电角度的回授链。蓝色为控制器、橙色为限幅或 AW、绿色箭头为前馈；实线箭头表示讯号方向。

波形	说明
ADC sampled phase currents	sampleia / b / c : ADC 事件锁存，直到下次取样保持不变
Clarke / stationary current frame	ialpha、ibeta : 由 sampled 相电流转换的保持值
Park feedback vs plant dq state	heldid / heldiq 是控制器看到的回授；id / iq 是连续 plant 状态
Encoder / mechanical and electrical angle	θ_m 连续角； θ_e wrap 至 $[0, 2\pi)$ ；sampletheta 为取样电角
Inverse Park voltage commands	V_α 、 V_β : 向量限幅后、送往 SVPWM 的命令，不是实际相电压
ADC hold detail	最后 8 个 PWM 周期的 sampled / plant 对照，适合观察取样保持

θ_e 的锯齿跳回是角度 wrap，不是转子倒转。 θ_m 不 wrap，应用于判断多圈位置。

7.3 Controller Output / Anti-Windup

每一控制事件的诊断值在下次更新前保持；总览仍可能降采样。点选图例可隐藏不需要的曲线。

d / q 轴 PI / vector saturation :

图例	d / q CSV 栏位	意义	单位
P term	dp / qp	$K_p \cdot e$	V
I state (used)	di / qi	本次形成输出时使用的 $x[k]$	V
PI raw	dpi / qpi	P+I，未加入解耦	V
Decoupling voltage	dff / qff	电角速度交叉项补偿与 back-EMF 补偿	V
Pre-vector voltage	daw / qaw	PI raw + decoupling	V
Post-vector voltage	dsat / qsat	共享向量限幅后命令	V
AW correction	daw / qaw	启用时 $K_{aw} \cdot (\text{post-pre})$ ，否则 0	V/s

请成对看 dsat、qsat 的向量长度，不能仅因某一轴低于 V_{max} 就认为没有饱和。AW correction 是积分变化率的修正项，不是电压，也不是完整积分变化率；完整变化率为 $K_i \cdot e + AW$ 。

Post-vector voltage 还没经过一周期 CCR 延迟、量化、switching 与 dead-time，不能称为已施加的瞬时 plant dq 电压。CSV 的 vd / vq 才是由实际 switching phase voltage 转换的 dq 电压；它们与 dsat / qsat 不会逐点相等。

Speed PI / torque limits :

图例	CSV 栏位	意义
P term	speedP	$K_p \omega_{ew}$, N·m
I state (used)	speedI	形成本次 PI 输出的积分状态 , N·m
PI raw	tefb	$P+I$, N·m
Total raw	teraw	$PI + \text{acceleration FF} + \text{friction FF}$, N·m
Torque-limited	teref	转矩命令限制后 , N·m
After current limit	speedEffective	$K_t i_q^*$, N·m ; 有效命令等效转矩 , 并非实际 T_e
AW correction	speedAW	$K_a \omega \cdot (\text{speedEffective} - \text{teraw})$, N·m/s

CSV 的 `speedIntegral` 是更新后的 $x\omega[n+1]$, 而 `speedI` 是本次输出使用的 $x\omega[n]$ 。要检查 $P+I=PI \text{ raw}$, 使用 `speedI` 。

Position P / speed limit :

- Position P raw / `omegaPb` : $K_p \cdot \text{pos} \cdot (\theta_{\text{ref}} - \theta_m)$, rad/s。
- With velocity FF / `positionRawSpeed` : 位置 P 加上速度前馈后的合成值 , 即 $\omega_{fb} + K_{vff} \cdot \omega_{\text{ref}}$, rad/s ; 此处不包含加速度前馈 , 后者加在转矩支路。
- Speed-limited / `speedcmd` : 限速后 ω_{cmd} , rad/s。

位置环只有上述 P 与限制 ; 图中没有位置 I 或位置 AW。

7.4 Switching / Dead time

波形	用途
Center-aligned CNT / CCR	CNT 与 active CCR A / B / C , 单位 counts ; 观察比较交点
PWM switching / ADC / apply event	Sa / Sb / Sc 逻辑、ADC 事件、CCR apply 事件 ; apply 表示载入 pending , 即使数值恰巧相同也可为 1
Phase-to-neutral voltage	$V_{an} / V_{bn} / V_{cn}$, V ; 已扣 floating neutral , 并含启用的 dead-time 扰动
Dead-time voltage error	$\Delta V_{an} / \Delta V_{bn} / \Delta V_{cn}$ 是中性点重建后误差 ; ΔV_{aO} 是 A 相 pole 误差
Switching current detail	相电流的末段 ripple ; 用于观察切换与 dead-time 影响
Sample & hold / current state	末段 i_d / i_q 与 $\text{heldid} / \text{heldiq}$ 的差异

高速图只保留模拟最后 8 个 PWM 周期 , 横轴是该视窗起点之后的 μs ; 总览横轴是模拟起点之后的 ms 。游标回到早期时刻 , 不代表高速图也自动移到该时刻。

7.5 指标与资料解析度

- Final rpm / iq : 最后积分状态，不是末段平均，也不保证已到 steady state。
- Peak current : 模拟积分节点上的最大相电流绝对值。
- Saturation % : 向量电压限幅发生的电流控制更新次数比例，不是 torque limit 比例。
- Cost : 计算耗时，不是模拟 Duration。
- 总览约最多 6000 点，可能漏掉 switching edge 或短暂事件；高速图保留末段完整 plant 节点，但 switching edge 仍受 plant 步长解析度限制。

8. Bode 分析操作与解读

1. 选择「目前设定」或「上次模拟快照」。要解释既有波形时，优先选快照。
2. Current Mode 仅显示 d / q 电流回路；Speed Mode 额外显示速度回路；Position Mode 再加位置回路。
3. Speed model 选 Ideal、With current-loop dynamics 或 With digital delay (完整比较表与影响范围见第 5.4 节开头)。此选项只改变分析模型，不切换时间模拟引擎；电流 Bode 始终使用第 6 节数位模型。
4. 更新 Bode，查看交越频率、PM、GM 与两种 bandwidth。

曲线 / 栏位	定义
Open loop L	沿该负回授回路的开环传递函数
Feedback Closed-Loop	$L/(1+L)$ ，不含参考前馈
Command Tracking	包含已启用参考前馈的 reference→output；只画幅频曲线
Gain crossover / PM	开环 0 dB 交越与 180° +开环相位
Phase crossover / GM	开环 -180° (及后续相位分支) 交越与所需增益裕度
Nyquist	该回路取样率一半；不是建议控制频宽
Feedback BW	回授闭环相对自身平坦低频增益下降 3.0103 dB 的首次向下交越
Command-Tracking BW	命令追踪曲线依相同方式定义的频宽

N/A 可能因没有可靠交越、低频不平坦、扫描结果无效，或没有正 PM 的 gain crossover，不能直接解读为「不稳定」，也不能解读为「无限频宽」。程式用频率扫描估计裕度，并非完整稳定性证明。

Bode 不含限流、限压、AW、dead-time、switching ripple 与完整 dq 非线性耦合。即使关闭 decoupling，页面仍显示理想解耦参考模型。实际已饱和时，不宜用小讯号 bandwidth 预测大步阶收敛时间。

9. 六个实验

每个实验请记录完整参数、执行后快照及 CSV；比较时一次只改一个条件。以下设定均是在目前预设值上覆写。

实验一：堵转 dq 电流阶跃

目的：排除机械加速与 back-EMF，建立电流环基准。

设定：Current、Locked Rotor、id=0、iq=5 A、TL=0、Start=0.02 s、Duration=0.25 s，其余预设。

步骤：执行；观察 dq current、q 轴 PI / vector diagnostics、Encoder angle。记录末段 iq 平均与 ripple，而非仅看 Final iq。

预期：iq 上升后保持在约 5 A，id 约 0； ω_m 、 θ_m 全程为零。稳态 q 电压约 $R_s \cdot i_q = 6$ V，实际命令还会补偿 dead-time、量化及 ripple。起点的大误差可能造成短暂电压饱和，并不代表稳态追踪失败。

思考：为何速度为零仍有 T_e ？为何 iq 为 DC、相电流不一定是时间上的三相正弦？

实验二：自由运转、back-EMF 与失去电流追踪

目的：分辨 PI steady-state error 与电压能力不足。

设定：沿用实验一，只改 Free Running。

预期与观察：iq 先追上 5 A，转矩使转子加速； $\omega_e \psi_f$ 上升，q 解耦电压增加；Pre-vector 与 Post-vector 逐渐分离，iq 可能下降。电流不再追踪不必然是 PI 设计错误。

估计 id≈0、iq 近稳态时：

$$v_d \approx -\omega_e L_q i_q, \quad v_q \approx R_s i_q + \omega_e \psi_f.$$

判断电压需求应用 $\sqrt{v_d^2 + v_q^2} \leq V_{max}$ ，不能只看 $v_q \leq V_{max}$ 。当 iq 已掉落且电气状态仍变动时，以上仅供趋势估计。

既有模型回归参考：40 steps/PWM、0.25 s 的同设定测试，堵转 Final iq 约 5.002 A；自由运转约 2973 rpm、Final iq 约 1.177 A。这些是先前模型测试值，不是本手册保证的精确标准；目前预设 80 steps/PWM，读值可有差异。

实验三：电流向量饱和与 AW on / off

目的：直接看积分累积与回算修正。

设定：Current、Locked Rotor、Vdc=12 V、iq=30 A、Iq limit=40 A、id=0、TL=0、Start=0.02 s、Duration=0.10 s。

步骤：AW on 执行并汇出；AW off 再执行汇出。比较 q I state、PI raw、Pre / Post-vector 以及 AW correction。

预期：持续受限时两次都追不到 30 A；AW on 的积分状态通常受抑制，AW off 修正恒为零且积分持续累积。较大 I state 不代表较佳控制。

量化检查： $q_{pi} = q_p + q_i$ ； $q_{raw} = q_{pi} + q_{ff}$ ；AW on 时 $q_{aw} = K_{aw} \cdot (q_{sat} - q_{raw})$ 。若要比解除饱和后的恢复，本页没有任意分段电流命令编辑器，不能用此持续高命令实验宣称已测得解除后 recovery time。

实验四：速度 PI 与两级命令限幅

目的：理解 Speed PI 的转矩单位，以及 AW 追踪对象。

设定：Speed、1500 rpm、Step、Start=0.02 s、Duration=0.5 s、TL=0；Torque limit=0.10 N·m、Iq limit=12 A。其余预设。

步骤：比较 AW on / off 的 speedI、teraw、teref、speedEffective、speedAW。再保持 AW on，将 Torque limit 改回 1.8 N·m、Iq limit 改成 1 A，重跑。

预期：第一组主要碰转矩限幅；第二组有效命令转矩上限约 $K_t \cdot 1 \text{ A} = 0.09 \text{ N}\cdot\text{m}$ ，teref 可能还没到限制，但 speedEffective 已受限。检查 speedAW 是否以有效转矩差回算。

延伸：恢复命令限幅，加入 0.15 N·m、0.15 s 负载，观察速度下降、电流增加与 PI 积分补偿。若电压饱和，应同时看内环诊断，不能只用速度 PI 曲线解释。

实验五：位置轨迹、速度 / 加速度前馈

目的：区分轨迹规划、位置回授与前馈。

设定：Control Mode 选 Position Control。Target Position=1 rad、Max Velocity (position)=10 rad/s、Max Acceleration=100 rad/s²、Start=0.02 s、Duration=0.5 s、TL=0；前馈开启时 Kvff=1、Kaff=1，Friction FF 保持关闭。

位置分段方程式、系数与 UI 参数对照详见第 4.5.1–4.5.4 节。

Step / Ramp 到底选哪一个？此实验的 Speed profile 不适用，保留预设 Step 即可。这个选项只在 Speed Control 模式决定速度命令是 Step 或 Ramp；Position 模式不读取它。即使目前 UI 仍显示此选项，改选 Ramp 也不会改变本实验的位置轨迹。保留 Step 不代表位置参考直接跳成 1 rad：Position 的目标会先经轨迹产生器，依位移、最大速度与加速度自动产生三角形或梯形速度轨迹。

轨迹时间符号：ta 是加速时间（对称减速也使用 ta）；tc 是等速时间；Tmove=2ta+tc 是参考轨迹从开始到结束的运动时间，与整次模拟 Duration 不同。本设定 ta=0.1 s、tc=0、Tmove=0.2 s，为三角形速度轨迹：0.02 s 开始、0.12 s 到达速度峰值、0.22 s 参考轨迹结束；实际马达是否已到位、稳定，仍须看波形。

在 UI 哪里看？选 Position Control，再点 Trajectory Generator，设定最大速度与最大加速度。参数面板下方可见轨迹类型及 duration=0.200000 s（即 Tmove）；目前没有分别显示 ta、tc 的计算数值。时间波形选 Control response，观察位置参考 θ_{ref} 、速度参考 ω_{ref} 与加速度参考 a_{ref} 。

步骤：先关闭 Velocity FF 与 Acceleration FF 执行；再只开 Velocity FF；最后两者都开。其余参数相同。比较 position following error、 ω_{ref} / ω_{cmd} / ω_{m} 、torque contributions。

预期：合理前馈可降低运动中的追踪误差；效果受模型、限制与离散时序影响，不能保证任意增益均改善。位置 P raw 与 With velocity FF 的差值应为启用的 Kvff· ω_{ref} 。

限速延伸：将 Position speed limit 降至 3 rad/s，观察合成速度被限制后轨迹误差增大；规划 ω_{ref} 本身不因这个下游限制自动重规划。

实验六：取样延迟、dead-time 与 Bode

目的：连结数位模型与时域波形。

设定：先回到实验一；保留 10 kHz，观察末段高速图与时序游标。

步骤：

1. 对照 ADC valley、pending CCR、下一个 valley 的 active CCR，确认一周周期延迟。

2. dead-time 开 / 关各跑一次，比较 ΔV 、 q I state、相电流 ripple；堵转 $\theta_e=0$ 时，不要预期一定出现旋转时典型的正弦过零失真。
 3. Current Bode 记录 bandwidth 与 PM；调低 PWM 频率后重跑并更新 Bode，检查 T_s 与 delay 的影响。
 4. Speed Mode 比较三种 Bode 模型，记录其 PM / bandwidth 差异；时间模拟引擎保持同一套实际模型。
- 思考：为何同一组 PI，在连续理想模型与含 z^{-1} 延迟模型的裕度不同？提高 ARR 为何不能取代缩小 plant 积分步长？

10. 资料汇出、常见问题与实验纪录

10.1 CSV 使用方式

汇出档案为 `motor-lab-results.csv`。开头 # 行包含 JSON 参数与 metadata，之后为栏名；第一栏 dataset 区分 slow / fast。汇入分析工具前，跳过注解行并依 dataset 分组，不要把两组直接串接为单调时间序列，因为末段视窗会与 slow 时段重叠。

t 单位为秒；图上的 ms / μ s 是显示换算。rpm / ref 是 rpm；speedcmd、velocityref、omega_fb 是 rad/s。
theta_m / positionref 为 rad。sat 是该次保持的电压向量限幅旗标。metadata 的饱和比例用完整控制更新计数，不能直接由降采样 slow 的 sat 平均保证重现。

da/db/dc、ccra/b/c 是 active duty / CCR，不是当次刚计算的 pending 值。pending / active 全控制周期资料保留于页面结果的 timing 结构，CSV 未独立汇出 timing 阵列。

10.2 常见问题

现象	先检查
iq 先到命令、后来下降	是否 Free Running？速度、qff 与向量电压是否增加？
堵转时 iq 仍追不到	Vdc、Rs-iq 需求、调变限制、PI、q 命令限制及数值解析度
Speed AW 为零但电流追不到	外环是否未碰命令限幅、但内环已电压饱和？Speed AW 不直接追踪实际 iq
I term 与 PI raw 加总对不上	使用输出前的 di / qi / speedI；speedIntegral 是更新后状态
Position 0.25 s 还没稳定	轨迹何时完成？Duration 是否足够？有无速度 / 转矩 / 电压限制？
改参数后波形没变	是否已重新执行？Bode 是 live 还是 result snapshot？
θ_e 突然跳回零	正常 wrap；改看连续 θ_m 判断实际位置
Bode 好看但大步阶不好	小讯号模型忽略饱和、AW、switching 与非线性；检查实际限制
出现数值发散提示	检查增益、步长、极端参数，避免直接把数值失败当成物理结论
引擎 / 图表没有载入	检查網路、CDN、Web Worker 与浏览器错误讯息；首次载入不是完全离线

10.3 实验报告范本

项目	填写
实验名称 / 日期 / 页面版本	
Control Mode / Mechanical Condition	
目标、Start、Duration、轨迹条件	
Rs、Ld、Lq、 ψ_f 、p、J、B	
Vdc、m、dead-time、PWM actual、ARR、Ts、T ω 、plant 步长	
各环 Kp、Ki、Kaw、AW / decoupling / FF 开关	
电流 / 转矩 / 速度限制与负载	
观察波形、CSV 档名、分析快照	
末段平均误差、ripple、饱和比例	
Feedback BW / Command BW / PM / GM 与模型选择	
观察到的因果关系、模型假设与限制	

本软体未模拟磁饱和、温升、完整损耗、硬体保护与非理想位置感测。参数实验用于理解控制与数值模型，不能把其电流命令限幅误认为完整硬体保护模型。

11. 附录：数位速度 / 位置模型

本节供需要对照页面 `bodeModel` 的读者使用。目标是精确说明名义数位分析，不是另建一套 switching 模型。

11.1 电流与机械联合离散模型

理想解耦、固定 i_{d0} 下，令连续 plant 状态 $y=[i_q, \omega_m]$ ：

$$\dot{y} = A_c y + B_c v_q, \quad A_c = \begin{bmatrix} -R_s/L_q & 0 \\ K_\tau/J & -B/J \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 1/L_q \\ 0 \end{bmatrix}.$$

精确 ZOH 离散化：

$$\Phi = e^{A_c T_s}, \quad \Gamma = \int_0^{T_s} e^{A_c \tau} B_c d\tau.$$

包含 PI 积分与 active 电压的状态 $x=[i_q, \omega_m, \xi_q, v_{active}]$ ，输入 r 为 N·m 转矩命令：

$$x[k+1] = Ax[k] + B_r r[k],$$

$$A = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & 0 & \Gamma_1 \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & 0 & \Gamma_2 \\ -K_{iq}T_s & 0 & 1 & 0 \\ -K_{pq} & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K_{iq}T_s/K_t \\ K_{pq}/K_t \end{bmatrix}.$$

最后一列代表新电压到下一周期才成为 active，已内含 current computation delay。若外环每 M 次电流更新才运算一次，转矩命令在这 M 次之间保持：

$$A_M = A^M, \quad B_M = \sum_{k=0}^{M-1} A^k B_r, \quad F_\omega(z_\omega) = c_\omega(z_\omega I - A_M)^{-1} B_M,$$

其中 $c_\omega=[0, 1, 0, 0]$ 、 $z_\omega=\exp(j2\pi f T_\omega)$ 。

$$C_\omega(z_\omega) = K_{p\omega} + \frac{K_{i\omega}T_\omega}{z_\omega - 1}, \quad L_\omega(z_\omega) = C_\omega(z_\omega)F_\omega(z_\omega).$$

11.2 位置状态与速度闭环

加入 θ_m 后，连续 plant 状态采 $[i_q, \omega_m, \theta_m]$ ，并加入 $\theta_m=\omega_m$ ，以相同 matrix exponential 求得精确一个 T_s 的位置积分。将其与 current PI 积分、active 电压组成五状态 $x_p=[i_q, \omega_m, \xi_q, v_{active}, \theta_m]$ ，再 lift 至外环周期，记为：

$$x_p[n+1] = F_p x_p[n] + G_p T^*[n].$$

令 $c_\omega=[0, 1, 0, 0, 0]$ 、 $c_\theta=[0, 0, 0, 0, 1]$ ；加入 Speed PI 积分 ξ_ω 后，闭速度环的六状态矩阵为：

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} F_p - G_p K_{p\omega} c_\omega & G_p \\ -K_{i\omega} T_\omega c_\omega & 1 \end{bmatrix}, \quad B_{cl} = \begin{bmatrix} G_p K_{p\omega} \\ K_{i\omega} T_\omega \end{bmatrix}.$$

速度命令到位置：

$$H_{\theta}(z_{\omega}) = [c_{\theta} \ 0](z_{\omega}I - A_{cl})^{-1}B_{cl}, \quad L_{\theta}(z_{\omega}) = K_{p,pos}H_{\theta}(z_{\omega}).$$

$$T_{\theta}(z_{\omega}) = \frac{L_{\theta}(z_{\omega})}{1 + L_{\theta}(z_{\omega})}.$$

页面因此不是简单在数位速度闭环后任意乘一个近似 $1/s$ ，而是精确累积该 held-voltage plant 的位置状态。数位 Command Tracking 另外以平滑轨迹的解析导数关系 $j\omega$ 、 $(j\omega)^2$ 加入前馈，并非用后向差分替代轨迹微分；仍排除限幅与非线性轨迹产生器。

11.3 版本与核对范围

2026-10-23 符号说明修订：补齐第 4.1 节 K_t / K_r 定义、单位与固定 d 轴条件；第 5.4 节明确展开 $T_q(s)$ ，新增图 09；模拟程式与数值公式未修改。

手册图版修订：共十张同风格 SVG（包含图 09 的转矩路径与图 10 的 ZOH / RL 等效模型）；Current / Speed / Position 图为实际运算路径的分层表示，第 6 图则刻意采未饱和、忽略前馈的名义模型。两者用途不同，应配合本文章节阅读。

本手册依上述日期的本机程式原始码、控制方程、Bode 实作、波形栏位与既有模型回归结果编写；未因撰写手册而修改模拟器。本次文件核对不代表完成新的真实浏览器或硬体验证。若日后修改控制路径、预设值或资料栏位，应同步修订本手册。